

Современный

Гуманитарный

Университет

Дистанционное образование

Сул. 800. 12,

0670.01.01;2

Рабочий учебник

Фамилия, имя, отчество _____

Факультет _____

Номер контракта _____

*6 18.12.14 10.12.14
8.12.14 - 10.12.14
21.12.14 - 10.12.14*

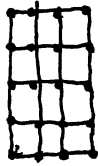
ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ЮНИТА 1

ОТНОШЕНИЯ.

БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ. ПРЕДИКАТЫ

Рассмотрим произвольный граф G с p вершинами и b ребрами. Пусть V — множество вершин, E — множество ребер. Пусть n — число вершин, m — число ребер. Пусть $d(v)$ — степень вершины v . Пусть D — матрица смежности. Пусть A — матрица adjacency. Пусть L — матрица Laplace. Пусть $\chi(G)$ — характеристический полином. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — собственные значения. Пусть $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$. Пусть $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2m$. Пусть $\sum_{i=1}^n \lambda_i^4 = 2m^2 + 2\sum_{(u,v) \in E} d(u)d(v)$. Пусть $\sum_{i=1}^n \lambda_i^6 = 2m^3 + 6\sum_{(u,v) \in E} d(u)^2 d(v) + 6\sum_{(u,v,w) \in \Delta} d(u)d(v)d(w)$. Пусть $\sum_{i=1}^n \lambda_i^8 = 2m^4 + 8\sum_{(u,v) \in E} d(u)^3 d(v) + 8\sum_{(u,v,w) \in \Delta} d(u)^2 d(v)d(w) + 6\sum_{(u,v,w,x) \in K_4} d(u)d(v)d(w)d(x)$. Пусть $\sum_{i=1}^n \lambda_i^{10} = 2m^5 + 10\sum_{(u,v) \in E} d(u)^4 d(v) + 10\sum_{(u,v,w) \in \Delta} d(u)^3 d(v)d(w) + 10\sum_{(u,v,w,x) \in K_4} d(u)^2 d(v)d(w)d(x) + 6\sum_{(u,v,w,x,y) \in K_5} d(u)d(v)d(w)d(x)d(y)$. Пусть $\sum_{i=1}^n \lambda_i^{12} = 2m^6 + 12\sum_{(u,v) \in E} d(u)^5 d(v) + 12\sum_{(u,v,w) \in \Delta} d(u)^4 d(v)d(w) + 12\sum_{(u,v,w,x) \in K_4} d(u)^3 d(v)d(w)d(x) + 12\sum_{(u,v,w,x,y) \in K_5} d(u)^2 d(v)d(w)d(x)d(y) + 6\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_6} d(u)d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)$. Пусть $\sum_{i=1}^n \lambda_i^{14} = 2m^7 + 14\sum_{(u,v) \in E} d(u)^6 d(v) + 14\sum_{(u,v,w) \in \Delta} d(u)^5 d(v)d(w) + 14\sum_{(u,v,w,x) \in K_4} d(u)^4 d(v)d(w)d(x) + 14\sum_{(u,v,w,x,y) \in K_5} d(u)^3 d(v)d(w)d(x)d(y) + 14\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_6} d(u)^2 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z) + 6\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_7} d(u)d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)$. Пусть $\sum_{i=1}^n \lambda_i^{16} = 2m^8 + 16\sum_{(u,v) \in E} d(u)^7 d(v) + 16\sum_{(u,v,w) \in \Delta} d(u)^6 d(v)d(w) + 16\sum_{(u,v,w,x) \in K_4} d(u)^5 d(v)d(w)d(x) + 16\sum_{(u,v,w,x,y) \in K_5} d(u)^4 d(v)d(w)d(x)d(y) + 16\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_6} d(u)^3 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z) + 16\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_7} d(u)^2 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w) + 6\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_8} d(u)d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x)$. Пусть $\sum_{i=1}^n \lambda_i^{18} = 2m^9 + 18\sum_{(u,v) \in E} d(u)^8 d(v) + 18\sum_{(u,v,w) \in \Delta} d(u)^7 d(v)d(w) + 18\sum_{(u,v,w,x) \in K_4} d(u)^6 d(v)d(w)d(x) + 18\sum_{(u,v,w,x,y) \in K_5} d(u)^5 d(v)d(w)d(x)d(y) + 18\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_6} d(u)^4 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z) + 18\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_7} d(u)^3 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w) + 18\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_8} d(u)^2 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x) + 6\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_9} d(u)d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x)d(y)$. Пусть $\sum_{i=1}^n \lambda_i^{20} = 2m^{10} + 20\sum_{(u,v) \in E} d(u)^9 d(v) + 20\sum_{(u,v,w) \in \Delta} d(u)^8 d(v)d(w) + 20\sum_{(u,v,w,x) \in K_4} d(u)^7 d(v)d(w)d(x) + 20\sum_{(u,v,w,x,y) \in K_5} d(u)^6 d(v)d(w)d(x)d(y) + 20\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_6} d(u)^5 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z) + 20\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_7} d(u)^4 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w) + 20\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_8} d(u)^3 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x) + 20\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_9} d(u)^2 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x)d(y) + 6\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_{10}} d(u)d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x)d(y)d(z)$. Пусть $\sum_{i=1}^n \lambda_i^{22} = 2m^{11} + 22\sum_{(u,v) \in E} d(u)^{10} d(v) + 22\sum_{(u,v,w) \in \Delta} d(u)^9 d(v)d(w) + 22\sum_{(u,v,w,x) \in K_4} d(u)^8 d(v)d(w)d(x) + 22\sum_{(u,v,w,x,y) \in K_5} d(u)^7 d(v)d(w)d(x)d(y) + 22\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_6} d(u)^6 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z) + 22\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_7} d(u)^5 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w) + 22\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_8} d(u)^4 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x) + 22\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_9} d(u)^3 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x)d(y) + 22\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_{10}} d(u)^2 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x)d(y)d(z) + 6\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_{11}} d(u)d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)$. Пусть $\sum_{i=1}^n \lambda_i^{24} = 2m^{12} + 24\sum_{(u,v) \in E} d(u)^{11} d(v) + 24\sum_{(u,v,w) \in \Delta} d(u)^{10} d(v)d(w) + 24\sum_{(u,v,w,x) \in K_4} d(u)^9 d(v)d(w)d(x) + 24\sum_{(u,v,w,x,y) \in K_5} d(u)^8 d(v)d(w)d(x)d(y) + 24\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_6} d(u)^7 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z) + 24\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_7} d(u)^6 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w) + 24\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_8} d(u)^5 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x) + 24\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_9} d(u)^4 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x)d(y) + 24\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_{10}} d(u)^3 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x)d(y)d(z) + 24\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_{11}} d(u)^2 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w) + 6\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_{12}} d(u)d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x)$. Пусть $\sum_{i=1}^n \lambda_i^{26} = 2m^{13} + 26\sum_{(u,v) \in E} d(u)^{12} d(v) + 26\sum_{(u,v,w) \in \Delta} d(u)^{11} d(v)d(w) + 26\sum_{(u,v,w,x) \in K_4} d(u)^{10} d(v)d(w)d(x) + 26\sum_{(u,v,w,x,y) \in K_5} d(u)^9 d(v)d(w)d(x)d(y) + 26\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_6} d(u)^8 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z) + 26\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_7} d(u)^7 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w) + 26\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_8} d(u)^6 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x) + 26\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_9} d(u)^5 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x)d(y) + 26\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_{10}} d(u)^4 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x)d(y)d(z) + 26\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_{11}} d(u)^3 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w) + 26\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_{12}} d(u)^2 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x) + 6\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_{13}} d(u)d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x)d(y)$. Пусть $\sum_{i=1}^n \lambda_i^{28} = 2m^{14} + 28\sum_{(u,v) \in E} d(u)^{13} d(v) + 28\sum_{(u,v,w) \in \Delta} d(u)^{12} d(v)d(w) + 28\sum_{(u,v,w,x) \in K_4} d(u)^{11} d(v)d(w)d(x) + 28\sum_{(u,v,w,x,y) \in K_5} d(u)^{10} d(v)d(w)d(x)d(y) + 28\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_6} d(u)^9 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z) + 28\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_7} d(u)^8 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w) + 28\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_8} d(u)^7 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x) + 28\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_9} d(u)^6 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x)d(y) + 28\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_{10}} d(u)^5 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x)d(y)d(z) + 28\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_{11}} d(u)^4 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w) + 28\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_{12}} d(u)^3 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x) + 28\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_{13}} d(u)^2 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x)d(y) + 6\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_{14}} d(u)d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x)d(y)d(z)$. Пусть $\sum_{i=1}^n \lambda_i^{30} = 2m^{15} + 30\sum_{(u,v) \in E} d(u)^{14} d(v) + 30\sum_{(u,v,w) \in \Delta} d(u)^{13} d(v)d(w) + 30\sum_{(u,v,w,x) \in K_4} d(u)^{12} d(v)d(w)d(x) + 30\sum_{(u,v,w,x,y) \in K_5} d(u)^{11} d(v)d(w)d(x)d(y) + 30\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_6} d(u)^{10} d(v)d(w)d(x)d(y)d(z) + 30\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_7} d(u)^9 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w) + 30\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_8} d(u)^8 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x) + 30\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_9} d(u)^7 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x)d(y) + 30\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_{10}} d(u)^6 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x)d(y)d(z) + 30\sum_{(u,v,w,x,y,z) \in K_{11}} d(u)^5 d(v)d(w)d(x)d(y)d(z)d(w)d(x$



x	y	z	$z \rightarrow y$
y	y	y	y
y	$\neg y$	$\neg y$	y
y	y	y	y
y	$\neg y$	$\neg y$	y
$\neg y$	y	y	$\neg y$
$\neg y$	$\neg y$	$\neg y$	y
$\neg y$	y	y	$\neg y$
$\neg y$	$\neg y$	$\neg y$	y

ОГЛАВЛЕНИЕ

	стр.
ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН	4
ЛИТЕРАТУРА	5
ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ	6
ТЕМАТИЧЕСКИЙ ОБЗОР	9
Введение. Предмет дискретной математики	9
Глава 1. Функциональные соответствия и отношения	14
§1. Операции над множествами	14
§2. Суперпозиция функций	20
§3. Бинарные отношения	26
§4. Отношения эквивалентности	33
§5. Отношения порядка	35
Глава 2. Элементы общей алгебры	42
§1. Операции на множестве	42
§2. Свойства бинарных операций	43
§3. Алгебры	44
§4. Операции над двоичными числами	47
Глава 3. Булевы функции	51
§1. Представления логических функций	51
§2. Логические формулы. Булева алгебра	56
§3. Дизъюнктивные нормальные формы	61
Глава 4. Функционально полные системы булевых функций	66
§1. Замкнутые классы булевых функций	66
§2. Предполные классы	69
§3. Критерий полноты системы булевых функций	73
§4. Схемы правильных рассуждений	79
§5. Аксиоматические теории	81
§6. Исчисление высказываний	87
Глава 5. Предикаты	92
§1. Операции над предикатами	92
§2. Предикатные формулы. Тавтологии	97
§3. Исчисление предикатов	103
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ	106
ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ УПРАЖНЕНИЙ ТРЕНИНГА	115
ФАЙЛ МАТЕРИАЛОВ	132
ГЛОССАРИЙ*	

* Глоссарий расположен в середине учебного пособия и предназначен для самостоятельного заучивания новых понятий.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Операции над множествами. Порождающая процедура. Разбиение множества. Кортж. Декартово (прямое) произведение множеств. Суперпозиция функций. Схемы из функциональных элементов. Характеристическая функция множества. Булеан.

Отношения. Бинарные отношения. Рефлексивное, симметричное, транзитивное отношения. Транзитивное замыкание. Отношения эквивалентности. Классы эквивалентности. Отношения строгого и нестрогого порядка. Упорядоченные и частично упорядоченные множества. Лексикографическое упорядочение. Изоморфные отношения.

Элементы общей алгебры. Алгебраические операции. Ассоциативные, коммутативные операции. Дистрибутивность. Алгебры. Изоморфизм алгебр. Алгебра Кантора. Арифметические действия над двоичными числами как поразрядные операции.

Логические переменные. Булевы функции. Табличное и геометрическое представление булевых функций. Существенные и фиктивные переменные. Логические формулы. Эквивалентность формул. Правила и приемы преобразования формул. Булева алгебра. Изоморфизм алгебры Кантора и алгебры логических функций. Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ). Совершенная ДНФ (СДНФ).

Замкнутые классы булевых функций. Многочлены Жегалкина. Линейные булевы функции. Двойственность для булевых функций. Монотонные булевы функции. Функционально полные системы. Теорема Поста о полноте. Независимость системы функций. Базис замкнутого класса.

Схемы правильных рассуждений. Выполнимые формулы. Тавтологически истинные формулы (тавтологии). Понятие аксиоматической теории. Вывод. Теорема. Выводимость. Исчисление высказываний: аксиоматика, правила вывода. Теорема о дедукции. Соотношение между истинностью и выводимостью. Полнота и непротиворечивость аксиоматической теории.

Логика предикатов. Область истинности. Кванторы. Свободные и связанные переменные. Формулы логики предикатов. Эквивалентные предикатные формулы. Интерпретация предикатной формулы. Тавтоства. Выполнимые формулы и тавтологии в логике предикатов. Исчисление предикатов. Аксиоматика узкого исчисления предикатов. Соотношение истинности и выводимости в исчислении предикатов.

ЛИТЕРАТУРА

Базовая

*1. КУЗНЕЦОВ О.П., АДЕЛЬСОН-ВЕЛЬСКИЙ Г.М. ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ, 2-е издание, М., "Энергоатомиздат", 1988.

*2. НЕФЕДОВ В.Н., ОСИПОВА В.А. КУРС ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ: учебное пособие для студентов специальности "Прикладная математика", МАИ, 1992.

Дополнительная

*3. ЛЕДЕНЕВА Т.М. СПЕЦ. ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ. ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА. Учебное пособие для специальности "Информационные системы". Воронеж, 1997.

*4. НАСЫРОВ З.Х. Учебное пособие по курсу "ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА". МНОЖЕСТВА, ОТНОШЕНИЯ, АЛГОРИТМЫ. Для студентов специальности "Прикладная математика", Обнинский институт атомной энергетики, факультет кибернетики, 1997.

*5. БЕЛОУСОВ А.И. ЛЕКЦИИ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ. МГТУ им. Баумана, М., 1994.

*6. КУЗНЕЦОВ В.Н. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ИНФОРМАТИКА. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ. Для студентов специальности "Информатика и вычислительная техника". Курган, 1994.

*7. ФРОЛОВ А.Б., БОЛОТОВ А.А., КОЛЯДА К.В. Учебное пособие по курсу "ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА". МОДЕЛИ И МЕТОДЫ. Мос. энергетический инст., 1989.

*8. ГОРБАТОВ В.А. ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ: учебное пособие для студентов вузов. М., Высш. школа, 1986.

*9. СТОЛЯР А.А. ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ЛОГИКУ. Пособие для учителей. М., 1965.

10. АРЕФЬЕВ В.Н. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ. ФУНКЦИИ. Юнита 1. М.: СГУ, 1999.

Примечание. Знаком (*) отмечены работы, использованные при составлении тематического обзора.

ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ

№ п/п	Умение	Алгоритмы
1	Определение порядка действий при вычислении значения суперпозиции элементарных функций и простых многоместных функций. Построение схемы из функциональных элементов, реализующей суперпозицию.	1. Составить иерархическую схему последовательности действий: а) Определить состав переменных и констант в формуле, которая задает функцию; б) Определить внешнюю операцию (функцию) и основные подформулы; в) Определить, какие из функций, составляющих суперпозицию, являются одноместными, а какие – двуместными. 2. Построить схему из функциональных элементов в соответствии с иерархической схемой вычисления: а) Определить совокупность используемых элементов с одним и двумя входами; б) Выделить подформулы, имеющие в суперпозиции больше одного вхождения; в) Осуществить необходимое соединение элементов.
2	Построение таблицы истинности для булевой функции, заданной логической формулой.	1. Определить n – число переменных заданной функции. 2. Используя умение 1, построить иерархическую схему подформул, определив порядок булевых операций. 3. Построить таблицу наборов значений n переменных в лексико-графическом порядке. 4. Присоединить к ней справа столбцы для вычисления значений промежуточных функций, выражаемых подформулами, в последовательности, определяемой иерархической схемой. 5. Последовательно для каждой строки таблицы вычислять значения промежуточных функций, начиная с внутренних, пользуясь таблицами истинности основных логических функций. Вычислять значения промежуточных функций, участвующих в суперпозиции, начиная с внутренних, и подставлять эти значения в качестве аргументов функций

№ п/п	Умение	Алгоритмы
		следующего уровня. Результат каждого вычисления (внешней операции) записывать в очередной столбец соответствующей строки. 6. Произвести разложение функции по первой переменной.
3	Для булевой функции, заданной кортежем номеров единичных строк, т.е. строк, на которых значение функции равно 1, построить СДНФ (совершенную дизъюнктивную нормальную форму). Упростить полученную формулу.	1. Используя построение умения 2, выполнить табличное представление функции по заданному кортежу. 2. Для каждой строки таблицы истинности, на которой функция равна 1, построить соответствующую элементарную конъюнкцию: в ней должны быть представлены все переменные: с отрицанием, если в данной строке значение переменной равно 0, и без отрицания, если оно равно 1. 3. Записать формулу СДНФ, объединив все построенные элементарные конъюнкции знаками дизъюнкции. 4. Проверить, что все конъюнкции имеют длину (количество сомножителей), равную количеству аргументов функции, а число слагаемых в дизъюнкции равно числу единиц в наборе значений функции. 5. Упростить формулу, используя основные эквивалентности и приемы поглощения и склеивания.
4	Булеву функцию, заданную формулой, выразить многочленом Жегалкина. Проверить принадлежность заданной функции классу L линейных функций.	1. Построить многочлен Жегалкина: а) заменить подформулы, использующие знаки функций $\rightarrow$, $\sim$, $\vee$, их выражениями через $\&$, $\oplus$, $\neg$; б) раскрыть скобки по правилу перемножения многочленов; в) сократить пары одинаковых слагаемых и упорядочить оставшиеся члены, в первую очередь, по их степеням, а внутри – в алфавитном порядке переменных. 2. Определить слагаемое наибольшей степени: если степени всех слагаемых не превышают 1 (т.е. все слагаемые – переменные или константа 1), то функция линейна.

№ п/п	Умение	Алгоритмы
5	Определение истинности предикатных формул. Задание 1. Определить область истинности I_p двуместного предиката $P(X, Y)$ заданного формулой. Задание 2. Проверить истинность заданной предикатной формулы, содержащей двуместный предикат $P(X, Y)$ с конечной предметной областью, обе переменные которого связаны кванторами.	1. Построить прямоугольную таблицу размерности $m \times n$, где m и n – число допустимых значений соответственно первого и второго переменного. Отметить недопустимые пары значений. 2. В каждую клетку таблицы, соответствующую допустимой паре (X, Y), вписать 0 или 1 в зависимости от вычисленного значения предиката $P(X, Y)$. 1. Если в заданной формуле оба квантора – одинаковые, то для истинности формулы в таблице должны содержаться: для квантора $\forall$ только единицы, для квантора $\exists$ – хотя бы одна единица. 2. Если в заданной формуле кванторы различны, то а) если внутренний квантор - $\forall$, то для истинности формулы в таблице должен существовать ряд из единиц, соответствующий переменной, связанной внешним квантором, б) если внутренний квантор - $\exists$, то для истинности формулы в каждом ряду таблицы, соответствующем переменной, связанной внешним квантором, должна присутствовать хотя бы одна единица.

ВВЕДЕНИЕ. ПРЕДМЕТ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Дискретная математика (ДМ), или дискретный анализ – область математики, которая занимается исследованиями структур и задач на конечных множествах. Поэтому в качестве синонима иногда используется термин “конечная математика”. Можно считать общепринятым деление математики на континуальную (непрерывную) и дискретную. Последняя представляет собой важное направление, имеющее характерные для него предмет исследований, методы и задачи. Специфика задач дискретной математики в первую очередь предполагает отказ от основных понятий классической математики – предела и непрерывности. Поэтому для задач ДМ обычные средства классического анализа являются вспомогательными.

ДМ – самостоятельное направление современной математики. ДМ изучает математические модели объектов, процессов, зависимостей, существующих в реальном мире, с которыми имеют дело в технике, информатике и других областях знаний.

Дискретная и непрерывная математика взаимно дополняют друг друга. Понятия и методы одной часто используются в другой. Один и тот же объект может рассматриваться с двух точек зрения и в зависимости от этого выбирается непрерывная или дискретная модель.

Сегодня ДМ является важным звеном математического образования. Умение проводить анализ, композицию и декомпозицию информационных комплексов и информационных процессов – обязательное квалификационное требование к специалистам в области информатики.

Знание дискретной математики необходимо для создания и эксплуатации интегрированных систем обработки информации и их компонент (математического обеспечения, пакетов прикладных программ, распределенных баз данных, сетей передачи данных, систем с разделением ресурсов и распределенной обработкой информации).

В широком смысле ДМ включает в себя такие сложившиеся математические разделы, как теория множеств и отношений, математическая логика, комбинаторный анализ, а также ряд других, которые стали развиваться наиболее интенсивно в связи с внедрением вычислительной техники. В узком смысле ДМ ограничивается только этими новыми разделами, к которым относятся: теория функциональных систем, теория графов, теория автоматов, теория кодирования, теория алгоритмов и др.

Еще в донытоновский период появились простейшие понятия комбинаторики (П.Ферма, Б.Паскаль, Франция, XVIII в.). Комбинаторика возникла как основа дискретной теории вероятностей в связи с

исследованиями в области азартных игр. Л.Эйлер в середине XVIII в. закладывает основы теории графов; в середине XIX в. Дж. Буль, опираясь на некоторые идеи Г.Лейбница, придумывает свою “универсальную алгебру” в продолжение наметившегося еще в средние века стремления к формализации аристотелевой логики. Конец XIX в., характеризующийся, с одной стороны, обобщающе-синтетическим подходом к различным разделам математики, а с другой – стремлением к строгости математических обоснований, дает толчок к созданию и быстрому расцвету математической логики.

Основным поставщиком задач и идей для ДМ в XX в. становится кибернетика, а универсальным вычислительным средством – ЭВМ. Задачи анализа и конструирования сложных систем послужили стимулом для разработки теории графов; задачи хранения, обработки и передачи информации привели к теории кодирования (дискретной теории информации); задачи оптимизации вызвали появление дискретного программирования (методы исследования и решения экстремальных задач на конечных множествах); исследование основных понятий вычислительной математики – вычислимости и алгоритма – стимулировало появление теории алгоритмов и теории сложности.

Напомним некоторые основные понятия базового курса [10].

Множество – это совокупность объектов, называемых **элементами** множества: запись $a \in A$ обозначает **принадлежность** элемента a множеству A , запись $b \notin A$ обозначает, что элемент b не принадлежит A . Множество $\emptyset$, не содержащее ни одного элемента, называется пустым. Равенство множеств A и B (запись $A = B$) означает, что A и B состоят из одних и тех же элементов. Если каждый элемент множества A принадлежит множеству B , то говорят, что A есть **подмножество** B , или A входит в B (запись $A \subseteq B$). Среди подмножеств любого множества B – пустое множество $\emptyset$ и само B . Множества A и B равны, когда выполнены оба вхождения: $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Множество считается заданным, если каким-либо образом указано некоторое свойство, которым обладают все его элементы и не обладают никакие другие объекты. В таком случае задание множества выглядит так: $\{X : \text{условие } P\}$ и читается: “множество элементов X , для которых выполнено условие P ” (здесь X – обозначение элемента).

В ряде случаев целесообразно рассматривать несколько множеств

в качестве подмножеств **универсального** множества U . Множество элементов U , которые не принадлежат некоторому множеству $A \subseteq U$, называется **дополнением** множества A (обозначение $\bar{A}$).

Если A, B – два множества, то с помощью теоретико-множественных операций могут быть получены другие множества.

Объединение C (обозначение $C = A \cup B$) – это множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A, B .

Пересечение C (обозначение $C = A \cap B$) – это множество элементов, принадлежащих обоим множествам A и B . **Разность** C множеств A и B (обозначение $C = A \setminus B$) – это множество элементов множества A , не принадлежащих множеству B .

Стандартные обозначения для некоторых наиболее употребительных **числовых** множеств:

N – множество натуральных чисел (иногда его начинают с 1, иногда с 0; обычно это оговаривается);

Z – множество целых чисел (положительные, отрицательные и 0);

Q – множество рациональных чисел, т.е. чисел, равных частному от деления двух целых чисел;

R – множество действительных чисел.

Очевидное соотношение: $N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$.

Множества, обозначаемые теми же прописными латинскими буквами с подстрочным знаком “+” или “–”, например Z_+ или R_- суть подмножества множеств Z и R , состоящие из чисел соответствующего знака.

Подмножества упомянутых числовых множеств, состоящие из чисел, находящихся между двумя числами a, b , называются **промежутками**:

интервал (открытый промежуток) $\{X : a < X < b\}$ обозначается (a, b) ;

отрезок (замкнутый промежуток) $\{X : a \leq X \leq b\}$ обозначается $[a, b]$;

a и b называются концами промежутка: отрезок содержит оба своих конца, интервал не содержит ни одного. **Полуинтервалы** $(a, b]$ и $[a, b)$,

содержащие один конец промежутка, определяются аналогично. Бесконечные промежутки $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ суть множества чисел, удовлетворяющих соответственно соотношениям $X > a$, $X \geq a$, $X < b$, $X \leq b$.

Высказыванием называется любое повествовательное предложение, относительно которого имеет смысл утверждать либо, что оно **истинно**, либо, что оно **ложно** (установить истинность того или иного высказывания бывает не просто, – иногда для этого нужно решить серьезную задачу). Предложение, содержащее переменную, при различных значениях которой оно становится истинным или ложным, называется **неопределенным высказыванием**.

Из простых высказываний p, q строятся **сложные** с помощью следующих основных **логических операций**:

конъюнкция есть высказывание “ p и q ” (обозначения $p \wedge q$ или $p \& q$), которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба составляющих высказывания p, q ;

дизъюнкция – высказывание “ p или q ” (обозначение $p \vee q$), истинное тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний p, q ;

импликация – высказывание “если p , то q ”, или “из p следует q ” (обозначение $p \rightarrow q$), которое ложно тогда и только тогда, когда p истинно, а q – ложно;

эквивалентность – высказывание “ p эквивалентно q ” (обозначение $p \sim q$), истинное в том и только в том случае, если p и q оба истинны, либо оба ложны.

Отрицанием высказывания p называется высказывание “не p ”, или “неверно, что p ” (обозначение $\bar{p}$ или $\neg p$), истинное тогда и только тогда, когда p ложно.

Обозначая истинность буквой $И$, а ложность – буквой $Л$, можно задать упомянутые операции таблицами.

p	$\bar{p}$	p	q	$p \& q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \sim q$
Л	И	Л	Л	Л	Л	И	И
И	Л	Л	И	Л	И	И	Л
		И	Л	Л	И	Л	Л
		И	И	И	И	И	И

Неопределенному высказыванию $P(X)$, содержащему переменную X , можно сопоставить высказывания “для всех X $P(X)$ истинно”, обозначаемое $\forall X : P(X)$, и “существует X такое, что $P(X)$ истинно”, обозначаемое $\exists X : P(X)$. Такие операции называются кванторами: **квантором общности** $\forall$ и **квантором существования** $\exists$. $\forall X : P(X)$ – высказывание истинное, если для всякого (каждого, любого) X выполнено $P(X)$ и ложное, если, напротив, существует X_0 , для которого $P(X_0)$ ложно. $\exists X : P(X)$ – высказывание истинное, если хотя бы для одного X_0 высказывание $P(X_0)$ истинно, и ложное, если, напротив, такого X_0 нет, т.е. для всех X $P(X)$ ложно.

ГЛАВА 1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СООТВЕТСТВИЯ И ОТНОШЕНИЯ

§1. Операции над множествами

Множество может быть задано перечислением его элементов, либо указанием характерного свойства, которым обладают элементы множества и только они.

Определить, обладает ли тот или иной объект заданным свойством и тем более найти все такие объекты, может быть сложной задачей. Например, найти множество корней уравнения означает решить уравнение. Решение вопроса о том, существует ли процедура распознавания тех или иных свойств математических объектов, относится к проблемам теории алгоритмов.

Кроме того, множество может определяться с помощью операций объединения, пересечения, дополнения до универсального множества, а также разности двух множеств.

Перечислим основные свойства этих операций. Пусть U – универсальное множество, A, B, C – его подмножества, $\emptyset$ – пустое множество. Равенства 1-10, 15-18 относятся к операциям объединения и пересечения; равенства 11-14 и 19-21 – к операции дополнения.

$$1. A \cup B = B \cup A$$

$$2. A \cap B = B \cap A$$

$$3. (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$4. (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$5. (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$6. (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$7. A \cup A = A$$

$$8. A \cap A = A$$

$$9. A \cup (A \cap B) = A$$

$$10. A \cap (A \cup B) = A$$

$$11. \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$12. \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$13. A \cup \bar{A} = U$$

$$14. A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$15. A \cup \emptyset = A$$

$$16. A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$17. A \cup U = U$$

$$18. A \cap U = A$$

$$19. \bar{U} = \emptyset$$

$$20. \overline{\emptyset} = U$$

$$21. \overline{\bar{A}} = A$$

Приведем также ряд свойств операции разности множеств.

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}; A \setminus A = \emptyset; A \setminus \emptyset = A; A \setminus U = \emptyset.$$

Еще один способ задания множества связан с понятием

порождающей процедуры.

Простейший пример - задание последовательности элементов множества формулой, содержащей параметр:

$$A = \{X_k = 3 + 2(k^2 + 1)\}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Задавая различные значения параметра k , мы можем вычислять элементы множества A : $X_0 = 5, X_1 = 7, X_2 = 13$ и т.д. Подобное задание может быть явным, как в данном примере, или неявным, требующим разрешения. В частности, используются **возвратные**, или **рекуррентные** соотношения. Например, числа Фибоначчи задаются условиями:

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ для } n > 2.$$

Последняя формула позволяет последовательно вычислять значения

$$a_3 = a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3; \quad a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5;$$

$a_5 = a_4 + a_3 = 5 + 3 = 8$ и т.д. Возможность выразить общий n -й член этой последовательности как явную функцию параметра n для того, чтобы можно было определить, например, значение a_{100} , не вычисляя всех предыдущих, будет рассмотрена в разделе "Элементы комбинаторики".

Рассмотрим другой пример задания числового множества M порождающей процедурой:

- (1) $5 \in M$;
- (2) если $a \in M$, то $1/a \in M$;
- (3) если $a \in M$, то $(1-a) \in M$.

Убедимся, что множество M конечно и состоит из 6 элементов, а именно $M = \{5, 1/5, -4, -1/4, 4/5, 5/4\}$. В самом деле, для каждого a , начиная со значения $a = 5$, есть две возможности порождения новых элементов: операциями (2) и (3). При этом могут получаться и элементы, порожденные ранее. Так, из числа 5 операцией (2) получается $1/5$, операцией (3) – число (-4) , а из числа $1/5$ операцией (2) – снова число 5.

Рассмотрим схему порождения (рис.1), где операция (2) изображена одинарной стрелкой, а операция (3) – двойной. Схема показывает, что никаких других чисел процедуры (2) и (3) не дают.

Если же в правиле (3) заменить $(1-a)$ на $(2-a)$, то порождаемое множество будет бесконечным: из числа 5 чередующейся последовательностью операций (2) и (3) порождается

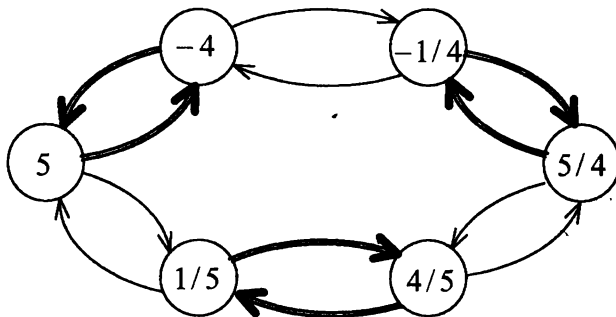


Рис. 1.

последовательность чисел

$$5 \rightarrow 1/5 \Rightarrow 9/5 \rightarrow 5/9 \Rightarrow 13/9 \rightarrow 9/13 \Rightarrow 17/13 \rightarrow 13/17 \Rightarrow \dots$$

$$\dots \Rightarrow \frac{1+4(k+1)}{1+4k} \rightarrow \frac{1+4k}{1+4(k+1)} \Rightarrow \frac{1+4(k+2)}{1+4(k+1)} \rightarrow \dots \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Упражнение. Проследите, какое число порождается конечной последовательностью операций 2, 3, 3, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 2. Введем еще одно понятие.

Разбиение множества U – система непустых подмножеств $\{A_\alpha\}$ множества U такая, что их объединение равно U (полнота разбиения), а все попарные пересечения – пусты (чистота разбиения). Сами A_α называются классами, или блоками разбиения. Система курсов данного факультета есть разбиение множества его студентов; система групп есть другое разбиение того же множества. Другой пример: множество всех автомобилей может быть разными способами разбито на классы в зависимости от марки, объема двигателя, компании-производителя, года выпуска, стоимости и др. При анкетировании или классификации объекты распределяются по группам; не входящие в ту или иную конкретную группу могут составлять группировку “прочие” – для полноты разбиения.

Пространство элементарных событий в некотором стохастическом эксперименте представляет собой разбиение достоверного события.

Множество прямых на плоскости разбивается на бесконечную совокупность систем прямых, параллельных тому или иному направлению. Поверхность, представляющая в трехмерной системе координат график функции двух переменных, разбивается на линии уровня.

Множество квартир дома разбивается на подмножества квартир, расположенных на одном этаже; другое разбиение – на подмножества

квартир из одного подъезда.

Если A и B - два подмножества универсального множества U , то 4 подмножества $D_0 = \bar{A} \cap \bar{B}$, $D_1 = \bar{A} \cap B$, $D_2 = A \cap \bar{B}$, $D_3 = A \cap B$ образуют разбиение множества U (см. рис.2). Аналогично, для 3 множеств A, B, C разбиение универсального множества U на 8 подмножеств $M_0 - M_7$ изображено на рис.3. Сами множества A, B, C могут быть представлены как объединения:

$$A = M_4 \cup M_5 \cup M_6 \cup M_7,$$

$$B = M_2 \cup M_3 \cup M_6 \cup M_7,$$

$$C = M_1 \cup M_3 \cup M_5 \cup M_7.$$

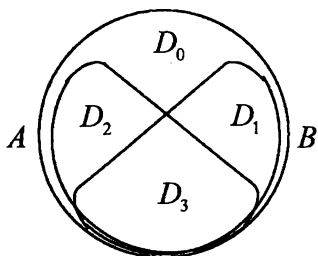


Рис. 2.

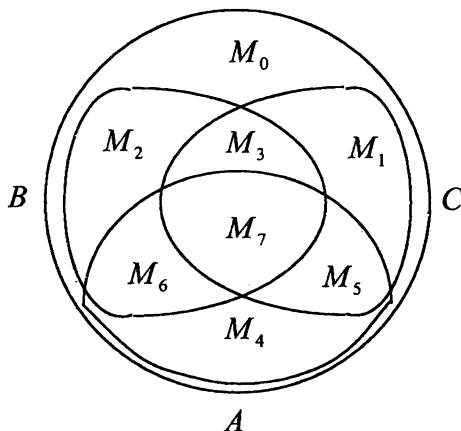


Рис. 3.

Упражнение. Выразить множества $M_1 - M_7$ с помощью операций $\cup, \cap, \bar{}$ над множествами A, B, C . Указание: множество M_0 , например, можно представить двояко: $M_0 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \overline{A \cup B \cup C}$.

Каждый элемент входит в множество в единственном экземпляре, без повторений, в отличие, например, от выборки в математической статистике. Конечная последовательность любых объектов, среди которых могут быть и повторяющиеся, называется **кортежем** (или **вектором**). Сами объекты называются **компонентами** кортежа.

Вектором обычно называют кортеж, состоящий из чисел. Кортёж обозначается так же, как вектор: $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$; n называется длиной кортежа. Примером кортежа могут служить кортеж чисел, кортеж цифр в записи целого числа, кортеж букв в слове, кортеж слов во фразе.

Два кортежа считаются равными, если у них при одинаковой длине совпадают первые элементы, вторые элементы и т.д. Поэтому, например, кортежи $(7, 8, A, +, 8)$ и $(7, 8, +, 8, A)$ различны, хотя имеют одинаковый состав.

Декартовым (прямым) произведением множеств называется

1) для двух множеств A, B : произведение $A \times B$ – множество всех пар (a, b) , где $a \in A, b \in B$;

2) для n множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$: произведение $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ – множество всех векторов $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, где $a_i \in A_i$ (т.е. $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$); если все A_i одинаковы и равны A , то произведение

$\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ раз}}$ обозначается A^n и называется n -й степенью

множества A .

Примеры. 1) Если R – множество точек числовой прямой, то R^n – множество точек n -мерного арифметического пространства; в частности, R^2 – множество точек плоскости, R^3 – множество точек пространства трех измерений.

2) Рассматриваемый в физике пространственно-временной континуум, представляющий собой прямое произведение $R^3 \times T$, где R^3 – трехмерное пространство, а T – числовая ось времени.

3) Географические координаты точки земной поверхности: широта и долгота представляют элемент прямого произведения $Ш \times Д$, где $Ш = [-90, +90]$, $Д = [-180, +180]$.

4) Известно, что прямая в трехмерном пространстве определяется двумя точками в том смысле, что через две различные точки проходит ровно одна прямая. Упорядоченная пара точек (M, N) есть элемент прямого произведения $R^3 \times R^3$, которому можно сопоставить точку 6-мерного пространства R^6 – 6 чисел: тройку координат точки M и тройку

координат точки N . В этом примере пара (N, M) определяет ту же прямую, что и (M, N) , а пара совпадающих элементов (M, M) не определяет прямой.

5) Возможные исходы при бросании игральной кости составляют множество $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, т.е. отрезок $[1, 6]$ натурального ряда. Если же игральную кость бросают 4 раза, то пространство элементарных событий представляет собой $[1, 6]^4$, т.е. множество всех четверок (a_1, a_2, a_3, a_4) , где $a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

В отдельных случаях имеют содержательный смысл не все пары, тройки и т.д. Так, в примере 3 при $\Pi = 90^\circ$ не имеет смысла значение D (подобно тому, как в полярных координатах при $\rho = 0$ не определено значение полярного угла φ).

Если A и B – два множества, то $A^2 \cup B^2 \subseteq (A \cup B)^2$; равенство достигается только если $A \subseteq B$ или $B \subseteq A$ (в частности, если $A = B$). Практической иллюстрацией этого соотношения является следующий пример.

6) В определении возрастания функции действительной переменной на множестве фигурируют пары точек:

$$\text{если } X_1 > X_2, \text{ то } f(X_1) > f(X_2). \quad (*)$$

Поэтому для функции f , возрастающей на множестве A_1 , выполнено условие (*) для $X_1, X_2 \in A_1$, т.е. $(X_1, X_2) \in A_1^2$. Аналогично, при возрастании той же функции на множестве A_2 условие (*) должно выполняться для $(X_1, X_2) \in A_2^2$. На рис.4 штриховкой показаны оба этих множества, – для наглядности, A_1 и A_2 – два непересекающихся промежутка $A_1 = [a, b], A_2 = [c, d]$. В то же время, для возрастания функции f на объединении $A_1 \cup A_2$ необходимо, чтобы условие (*) выполнялось для любой пары $(X_1, X_2) \in (A_1 \cup A_2)^2$. Из рис.4 видно, что это множество на координатной плоскости состоит из 4 частей: двух квадратов $[a, b]^2$ и $[c, d]^2$ и двух произведений $[a, b] \times [c, d]$ и

$[c, d] \times [a, b]$. В этих частях множества $(A_1 \cup A_2)^2$ условие (*) может выполняться не для всех пар (X_1, X_2) . Поэтому из возрастания функции f отдельно на A_1 и A_2 не следует, вообще говоря, возрастание на их объединении. Рассмотрите, например, функцию $Y = \operatorname{tg} X$ в областях $(0, \pi/2)$ и $(\pi/2, 3\pi/2)$ – см. рис.5.

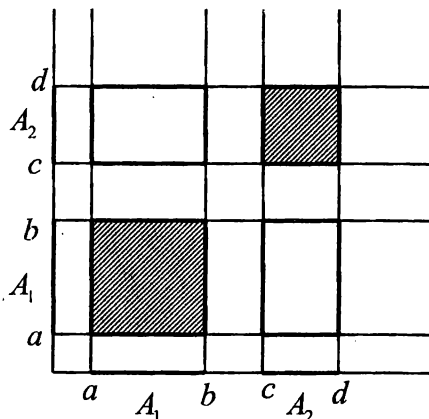


Рис. 4.

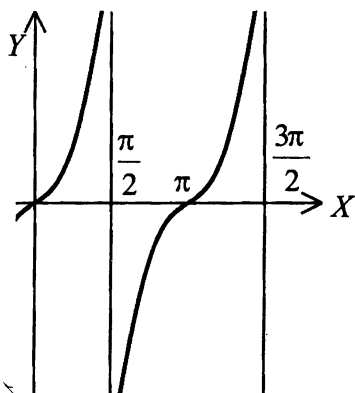


Рис. 5.

§2. Суперпозиция функций

Соответствием G между множествами A и B называется подмножество $G \subseteq A \times B$. Если $(a, b) \in G$, то говорят, что b соответствует a . Множество всех $b \in B$, соответствующих элементу $a \in A$, называется **образом** элемента a . Множество всех $a \in A$, которым соответствует элемент $b \in B$, называется **прообразом** элемента b .

Множество пар (b, a) таких, что $(a, b) \in G$ называется обратным по отношению к G и обозначается G^{-1} . Понятия образа и прообраза для G и G^{-1} взаимно обратны.

Примеры. 1) Поставим в соответствие натуральному числу n множество действительных чисел $\{n + \alpha\}, \alpha \in [0, 1)$. Образом числа 5 будет полуинтервал $[5, 6)$. Прообразом числа 5, так же как чисел 5.1,

$3\sqrt{3}$, 5.82 является число 5.

2) Пусть, в противоположность предыдущему примеру, каждому действительному числу X поставлено в соответствие целое число $[X]$ (так обозначают наибольшее целое, меньшее или равное X). Прообразом числа 5 при этом соответствии является бесконечное множество: полуинтервал $[5, 6)$.

3) Поставим в соответствие человеку его родителей. Образом при этом соответствии для каждого человека является множество из двух элементов: его мать и отец. Прообразом каждого человека $Ч$ является множество (быть может, пустое) его детей, т.е. тех людей, для которых $Ч$ является матерью или отцом.

Функциональное соответствие $A \rightarrow B$, или отображение – соответствие, при котором образом любого элемента $a \in A$ является **единственный** элемент $b \in B$. Например, площадь геометрической фигуры или объем пространственного тела суть их отображения в множество неотрицательных чисел. Если A, B – числовые множества, то соответствие $A \rightarrow B$ называется функцией (хотя иногда функциями называют и не числовые соответствия).

Упражнение. Определите, какие из соответствий трех предыдущих примеров являются функциональными.

n -местная функция (функция n переменных) - функция типа $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow B$; другая форма записи: $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = b$, где $a_i \in A_i$, $b \in B$. Сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень являются двуместными функциями. Двуместными функциями являются также $\max(X, Y)$ и $\min(X, Y)$:

$$\max(X, Y) = \begin{cases} X, & \text{если } X \geq Y \\ Y, & \text{если } X < Y \end{cases} \quad \min(X, Y) = \begin{cases} X, & \text{если } X \leq Y \\ Y, & \text{если } X > Y \end{cases}$$

Функции обычно задаются вычислительными процедурами, позволяющими по значению аргументов определить значение функции. Примерами вычислительных процедур могут считаться формулы, графики, таблицы. В понятии формулы важным элементом является операция подстановки, или суперпозиции, позволяющая из одних функций получать другие. Разберем это понятие подробнее.

Суперпозиция функций – функция, полученная из системы функций $f, f_1, f_2, \dots, f_k$ некоторой подстановкой функций $f_1, f_2, \dots, f_k$ во внешнюю функцию f вместо переменных и переименованиями

переменных.

Примеры. 1) Суперпозицией внешней функции $f(X, Y) = X / Y$ и функций $t_1(X) = \sqrt{X}$ и $t_2(X) = a^X$ является функция $h(X) = f(t_1(X), t_2(X)) = \sqrt{X} / a^X$ или функция $k(Y, Z) = \sqrt{Y} / a^Z$.

2) Суперпозициями внешней функции $f(X, Y, Z) = 3X + 5Y^2 - Z$ и функций $g_1(X, Y) = X - Y$ и $g_2(X) = \ln(X)$ являются, например:

а) $h_1(X, Z) = 3(X - Z) + 5\ln^2(Z) - Z$ [вместо X в функцию f подставляется $g_1(X, Z) = X - Z$; вместо Y - функция $g_2(Z) = \ln(Z)$];

б) $h_2(X, Y, Z, S) = 3\ln(Y) + 5(Z - X)^2 - \ln(S - Z)$ [вместо X в функцию f подставляется $g_2(Y) = \ln(Y)$; вместо Y - функция $g_1(Z, X) = Z - X$; вместо Z - суперпозиция функций $g_2(g_1(S, Z)) = \ln(S - Z)$].

3) Класс элементарных функций есть множество всех суперпозиций так называемых основных элементарных функций (одноместных: степенных, показательных, логарифмических, тригонометрических и обратных тригонометрических) и двуместных функций, представляющих арифметические операции.

Замечание. Среди основных элементарных функций нет двуместной функции $Z = X^Y$. Ее можно выразить суперпозицией других функций: логарифмической $S = \ln X$, показательной $T = e^X$ и умножения в силу тождества $X^Y = e^{Y \ln X}$.

Как видно из примеров, в суперпозиции функций могут измениться как сами переменные, так и их число. Заметим также, что, выполняя подстановки, мы преобразовывали формулы, выражающие функции. **Формула** – это выражение, описывающее суперпозицию и содержащее функциональные знаки, символы независимых переменных (аргументов) и констант (параметров). Формула с использованием скобок определяет порядок действий при вычислении значения функции. Специальные договоренности, позволяющие упростить вид формулы, освобождают ее от некоторых скобок: так в арифметике принято, что умножение и деление связывают сильнее, чем сложение и вычитание, и одночленные сомножители не заключаются в скобки.

Суперпозицию удобно представлять в виде символической схемы

вычисления. Если рассмотреть n -местную функцию $Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ как вычислительный элемент с n входами и одним выходом (см. рис.6), то суперпозиция представляет собой соединение таких элементов в схему. Определим индуктивно понятие вычислительной схемы (обратите внимание на то, как строится определение: вводятся некоторые начальные объекты, и задается способ образования из них других, более сложных объектов; такой тип определения называется **индуктивным**).

Пусть имеется конечное множество объектов $\{S_i\}$, которые будем называть **структурными** элементами. Каждый элемент имеет n_i входов и 1 выход. Графически элемент S_i изображается треугольником, в основание которого входят n_i занумерованных стрелок, а из вершины исходит одна (рис. 6а). **Сеть** из структурных элементов определяется следующим образом.

1) Каждый элемент S_i является сетью, входы и выходы сети – соответственно, входы и выходы элемента S .

2) Пусть S – структурный элемент с m входами и $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_m$ – сети из структурных элементов. Тогда соединение Σ этих сетей, изображенное на рис.6б, является сетью: ее входы – объединение входов сетей $\Sigma_1, \dots, \Sigma_m$, выходы сетей $\Sigma_1, \dots, \Sigma_m$ присоединены в определенном порядке к элементу S в качестве входов. Заметим, что у сетей Σ_i и Σ_j могут быть пересекающиеся множества входов. Выходом сети Σ считается выход элемента S .

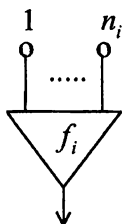


Рис. 6а

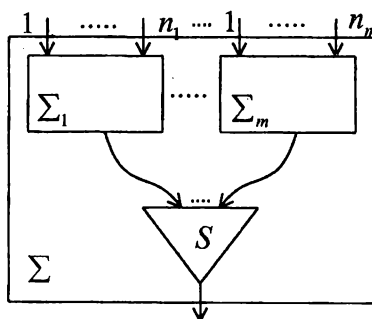


Рис. 6б

Сети $\Sigma_1, \dots, \Sigma_m$ называются подсетями, а их элементы вместе с элементом S – элементами сети Σ .

Схемой из функциональных элементов называется сеть, элементам которой приписаны (сопоставлены) функции, так что элементу S с k входами соответствует k -местная функция $f_S(X_1, \dots, X_k)$. Будем говорить, что элемент S реализует функцию $f_S(X_1, \dots, X_k)$. Значения выходов одних элементов служат значениями аргументов для функций других элементов в соответствии со структурой схемы, **причем важен порядок аргументов**. Если функция f_S , сопоставленная некоторому элементу S , не определена на каком-либо наборе значений своих аргументов, то не определены значения выхода S и не определены все функции элементов, на входы которых поступают значения f_S .

Рис.7 демонстрирует разницу в реализуемых функциях при различном порядке присоединения.

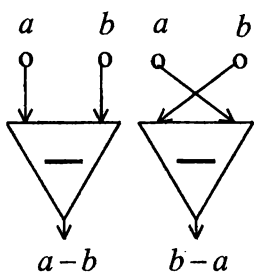


Рис. 7.

На рис.8 приведен пример схемы, состоящей из 7 элементов четырех типов: 1-местная f_4 , 2-местные f_1 и f_3 и 3-местная f_2 . Обратите внимание, что элемент S_3 реализует, в отличие

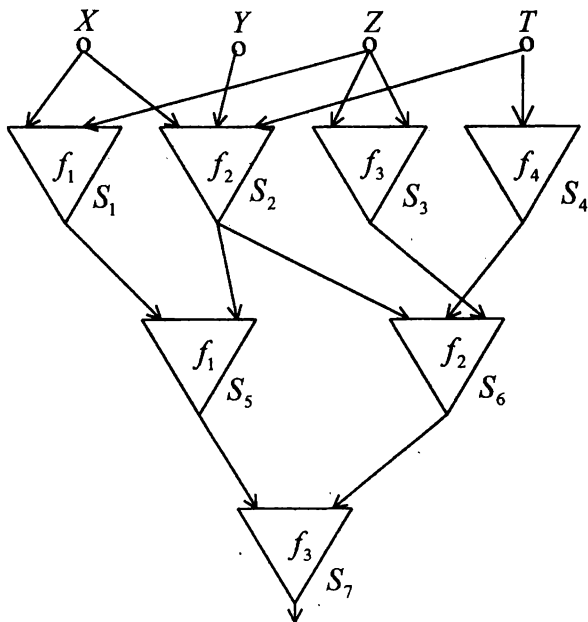


Рис. 8.

от элемента S_7 , функцию f_3 от совпадающих аргументов $f_3(Z, Z)$. В

целом схема реализует следующую суперпозицию:

$$W(X, Y, Z, T) =$$

$$= f_3\{f_1[f_1(X, Z), f_2(X, Y, T)], f_2[f_2(X, Y, T), f_4(T), f_3(Z, Z)]\}.$$

Разберем конкретные примеры.

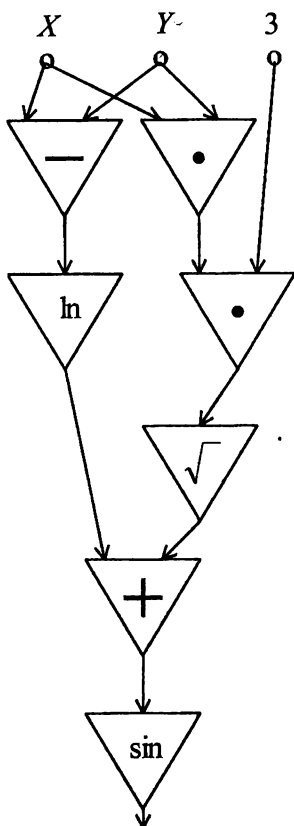


Рис. 9.

1) Пусть $Z = \sin(\sqrt{3XY} + \ln(X - Y))$. На рис.9 изображена схема из одно- и двухвходовых элементов, реализующих одноместные функции $\sin(t)$, $\sqrt{t}$, $\ln(t)$ и двуместные функции: сумму, разность, произведение.

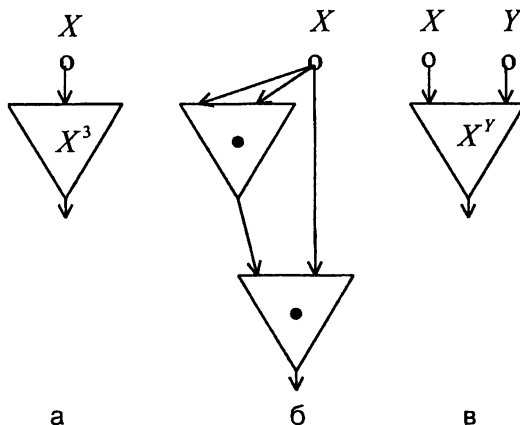


Рис. 10.

Вычислительная процедура определяется, вообще говоря, неоднозначно, и зависит от того, какие функции приняты за исходные. Так, функция $Z = X^3$ может рассматриваться как элементарная функция (см. рис.10а), как каскад из двух умножений $Z = (X \cdot X) \cdot X$ (см. рис.10б),

или как частный случай двуместной функции $Z = X^Y$ при $Y = 3$ (см. рис.10в). В последнем случае мы встречаемся с функцией-константой $g = 3$.

2) Построим схему вычисления выборочного среднего Mx и выборочной дисперсии Dx для статистической выборки $X = (a, b, c)$

объема 3. Из математической статистики известно, что

$$Mx = (a + b + c) / 3,$$

$$Dx = M(x^2) - (Mx)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) / 3 - ((a + b + c) / 3)^2.$$

Схема вычисления – на рис. 11. Строго говоря, в условии требуется построить 2 схемы: для Mx и Dx . Однако вычисление Mx является промежуточным результатом при вычислении Dx ; поэтому мы построили одну схему с 2 выходами, что, конечно, не вполне соответствует данному нами определению схемы из функциональных элементов.

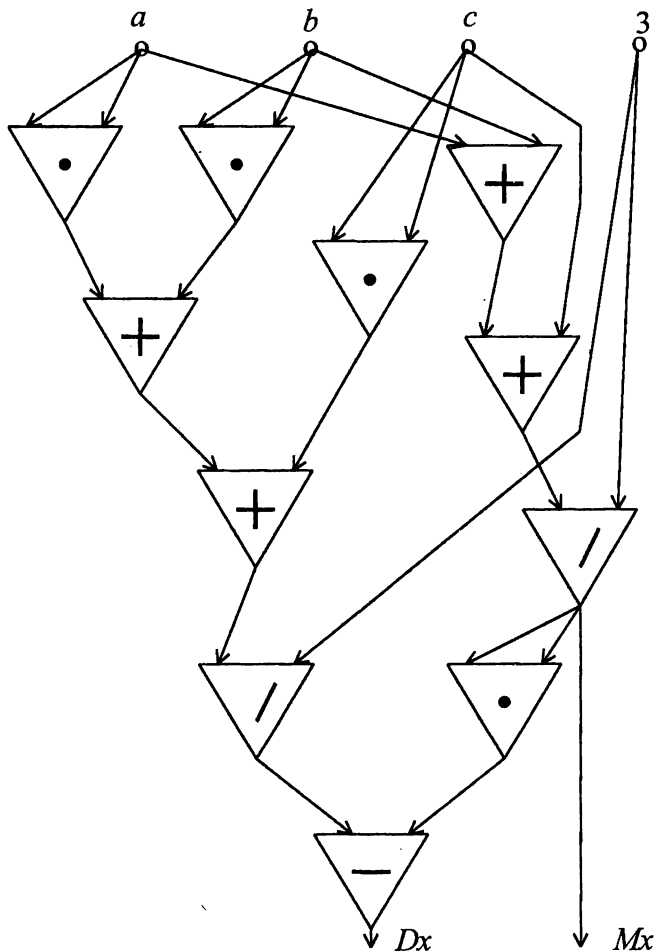


Рис. 11.

Упражнение: начертить схемы вычисления функций примера 2а (стр.22).

Рассмотрим еще один пример функционального соответствия. Пусть U – универсальное множество; $M \subseteq U$ – некоторое его подмножество, $B = \{0,1\}$ – множество из двух чисел 0 и 1.

Характеристическая функция множества $M \subseteq U$ – отображение $\chi_M : U \rightarrow B$, ставящее в соответствие элементам множества M единицу, а элементам дополнения $\bar{M}$ – ноль. Легко проверяются следующие свойства характеристической функции множеств, получаемых из множеств M, N операциями дополнения, пересечения, объединения и разности: $\chi_M = 1 - \chi_{\bar{M}}$; $\chi_{M \cap N} = \chi_M \cdot \chi_N$; $\chi_{M \cup N} = \chi_M + \chi_N - \chi_M \cdot \chi_N$; $\chi_{M \setminus N} = \chi_M - \chi_M \cdot \chi_N$.

С помощью характеристической функции удобно устанавливать некоторые соотношения между множествами.

Пример. Доказать, что $M \cup (M \cap N) = M$. Обозначим $\chi_M = A$, $\chi_N = B$ и докажем соответствующее числовое равенство:

$$\begin{aligned}\chi_{M \cup (M \cap N)} &= A + AB - A \cdot AB = [\text{поскольку } A=0 \text{ или } 1, \text{ то } A \cdot A = A] = \\ &= A + AB - AB = A = \chi_M.\end{aligned}$$

§3. Бинарные отношения

Начнем с примеров. Натуральные числа могут быть полными квадратами, как 4, 81, 144, или не быть ими, как 5, 30, 48. Это свойство, или признак числа можно трактовать как принадлежность к определенному подмножеству натуральных чисел – полных квадратов $\{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$. То же можно сказать про признак “ $X > 2$ ” для действительных чисел: число 5 обладает этим свойством, а число 1 – нет. Напротив, неравенство $X > Y$ выражает свойство не одного числа X или Y , а совокупное свойство пары чисел: если $X=5$, $Y=3$, то неравенство выполняется, а для пар (5, 10) и (3, 5) не выполняется. Можно выразить это так: условие $X > Y$ выполнено для определенного множества пар чисел.

Некоторые понятия как в математике, так и в обычном языковом употреблении самими своими названиями предполагают отношения

между субъектами или объектами: участник (какого-то мероприятия или коллектива), сосед, знакомый (чей-то), одноименный, сопоставимый (с кем-либо или чем-либо), отличающийся (от чего-то другого), внутри, снаружи, между, обратная функция, обратная теорема. В последнем случае, как мы знаем, если A – обратная теорема (по отношению к теореме B), то и B является обратной к A , так что этот термин характеризует не само утверждение A , а его взаимоотношение с другим утверждением. Также не бывает взаимно-однозначного множества – этим термином обозначается соответствие между двумя множествами.

Пусть задано непустое множество M . **n -арное (n -местное) отношение на множестве M** – подмножество $R \subseteq M^n$; обозначение – $R(m_1, m_2, \dots, m_n)$. Говорят, что элементы, составляющие кортеж $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ находятся в отношении R , причем это свойство не отдельных элементов, а именно их совокупности. Полезно рассматривать и одноместное (унарное) отношение – оно называется признаком, или свойством элементов множества M . В более общем смысле n -арное отношение можно определить и для совокупностей элементов различных множеств $M_1, M_2, \dots, M_n$ как подмножество $R \subseteq M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$. Число n называется **арностью**, или **местностью** отношения. Чаше других используется случай $n = 2$.

Бинарное (двуместное) отношение – множество пар $(a, b) \in R \subseteq M_1 \times M_2$; обозначение – $R(a, b)$ или aRb – элементы a и b находятся в отношении R .

Примеры. 1) Отношение равенства между двумя или несколькими числами, фигурами, множествами.

2) Бинарное отношение старшинства между людьми по возрасту или воинскому званию.

3) Бинарные родственные и другие отношения между людьми “быть отцом”, “быть внуком”, “быть одноклассниками”.

4) Трехместное (**тернарное**) отношение “между” для тройки точек (A, B, C) на прямой: точка A расположена между точками B и C .

5) Тернарное отношение для тройки точек на плоскости – “лежать на одной прямой”.

6) Четырехместное отношение для точек пространства – “принадлежать одной плоскости”.

7) Четырехместное отношение для чисел – “быть пропорциональными”, т.е. удовлетворять соотношению $X/Y = Z/T$.

8) Бинарное отношение между целыми числами – “иметь

одинаковые остатки от деления на 7".

9) Бинарное отношение $\{(1, 3), (4, 2), (4, 5), (3, 1), (2, 5), (3, 2)\}$ можно рассматривать просто как 6 пар натуральных чисел (см. рис.12); однако этот пример может иметь и содержательный смысл: например, для 5 авторов 1, 2, 3, 4, 5 пара (X, Y) означает, что автор X в своих работах ссылается на автора Y .

Отношение – понятие очень широкое. Так, можно рассматривать отношение принадлежности элемента a множеству M как

бинарное отношение между объектами a и M , выполненное для всех пар (a, M) таких, что $a \in M$.

Поскольку n -арные отношения являются множествами, то к ним применимы все теоретико-множественные операции: объединение, пересечение, дополнение и др. Так, объединение отношений " $X > Y$ " и " $X = Y$ " на числовом множестве есть отношение " $X \geq Y$ ", а дополнение к последнему есть отношение " $X < Y$ ".

Еще один важный пример – отношение включения для множеств.

Булеан $B(E)$ – множество всех подмножеств множества E .

Булеан $B(E)$ обозначается также 2^E . Если M, N – подмножества E и M есть подмножество множества N , то $(M \subseteq N)$ – бинарное отношение на $B(E)$.

Равенство отношений $R_1 = R_2$ есть равенство множеств R_1 и R_2 , определяющих эти отношения, хотя бы они были выражены по-разному. Например, отношения между натуральными числами "иметь одинаковые остатки от деления на 2" и "давать при сложении четное число" совпадают. Действительно, остатки от деления двух чисел p и q на 2 равны, если они оба четные (в этом случае остаток - 0) или оба нечетные (остаток 1). То же при сложении чисел p и q : если сумма четная, то оба слагаемых – одной четности, так как сумма четного и нечетного чисел – нечетна.

Бинарное отношение на конечном множестве можно представить квадратной матрицей, у которой строки и столбцы – это элементы

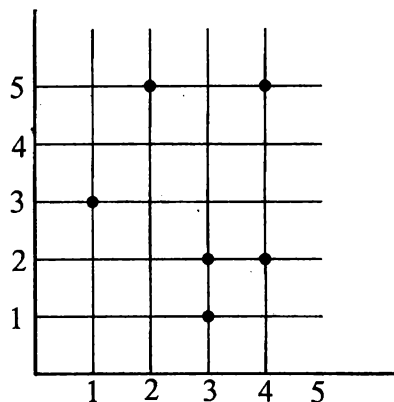


Рис. 12.

множества, а элемент матрицы, находящийся на пересечении строки X и столбца Y равен 1, если XRY , и равен 0 в противном случае.

Пример. Пусть $M\{a, b, c\}$. Рассмотрим 4 отношения:

$$R_1 = \{(a, b), (b, c), (c, a)\};$$

$$R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, b), (a, c), (b, c), (c, c)\};$$

$$R_3 = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, c)\};$$

$$R_4 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\}.$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Бинарное отношение можно изобразить схемой – см. рис.13, – сопоставив элементам множества точки (вершины), а парам (a, b) R -связки (линии со стрелками, идущие из a в b).

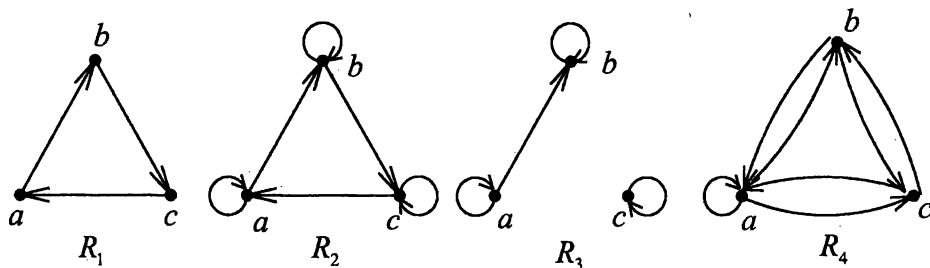


Рис. 13.

Отношение ARB можно рассматривать и как совокупность всех высказываний вида “элемент $a \in A$ находится в отношении R с элементом $b \in B$ ”. Поэтому для отношений содержательными являются определяемые естественным образом логические операции или связки: дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, которые порождают составные отношения; так, например, отрицание бинарного отношения R на множестве M есть бинарное отношение $\bar{R}$, в котором находятся все пары элементов из M , кроме находящихся в отношении R . $\bar{R}$ называют также противоположным отношением для R .

Упражнение. Сформулируйте самостоятельно, что называется

конъюнкцией и дизъюнкцией отношений. Рассмотрите конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание отношения ($a \in M$).

Инверсией бинарного отношения R называется отношение, обозначаемое R^{-1} и такое, что $aR^{-1}b$ тогда и только тогда, когда bRa .

Понятно, что инверсией отношения R^{-1} является отношение R , т.е. можно сказать, что отношения R и R^{-1} взаимно обратны.

Пример. Инверсией для отношения “больше” является отношение “меньше”; то же – для их разновидностей: старше – моложе, дороже – дешевле, выше – ниже и т.п.

Инверсия отношения отличается от отрицания: инверсией отношения $X > Y$ на множестве чисел является отношение $X < Y$, тогда как отрицанием – отношение $X \leq Y$.

Обратимся теперь к некоторым типам отношений, обладающих свойствами, которые представляют особый интерес.

Рефлексивное (соответственно, **антирефлексивное**) **отношение** – бинарное отношение, обладающее свойством $a : aRa$ (соответственно, $a : a\bar{R}a$).

Симметричное отношение – бинарное отношение, обладающее свойством $a, b : aRb \rightarrow bRa$ (т.е. из aRb следует bRa).

Антисимметричное отношение – бинарное отношение такое, что $\forall a, b$: если $a \neq b$, то $aRb \rightarrow b\bar{R}a$ – т.е. если a и b – в этом порядке! – находятся в отношении R , то b и a – нет. Это же свойство выражают иначе: $\forall a, b$: если aRb и bRa , то $a = b$.

Примеры. 1) Отношения равенства рефлексивны и симметричны.

2) Отношения между парами чисел “больше”, “меньше” – антирефлексивны и антисимметричны.

3) Отношение параллельности прямых рефлексивно и симметрично.

Понятие симметрии можно распространить и на отношения большей арности, имея в виду симметрию для отдельных пар в n -кортеже. Так, тернарное отношение $R(X, Y, Z)$ симметрично по паре (Y, Z) , если всегда $R(a, b, c)$ выполняется вместе с $R(a, c, b)$. Например, отношение $(X - Y = Z)$ симметрично по (Y, Z) . Действительно, если $X - Y = Z$, то $X = Y + Z$ и ясно, что перестановка Y и Z не изменяет равенства.

Транзитивное отношение – бинарное отношение, обладающее

свойством $a, b, c : (aRb \ \& \ bRc) \rightarrow aRc$.

Примеры. 1) Отношения “больше” и “меньше” транзитивны.

2) Отношение параллельности прямых транзитивно.

3) Отношения равенства транзитивны.

4) Отношения “правее”, “левее” между делениями на линейной шкале прибора.

5) Отношения “севернее”, “южнее” между точками земной поверхности.

Примеры нетранзитивных отношений.

1) Отношение перпендикулярности прямых.

2) Известное из истории европейского средневековья отношение между вассалом и сюзереном, выражавшееся формулой: “вассал моего вассала – не мой вассал”.

3) Отношение между игроками или командами в спортивном турнире: “участник X выиграл у участника Y ”: возможно, что A выиграл у B , B выиграл у C , но A проиграл C .

4) Отношения “западнее”, “восточнее” между точками земной поверхности: Ярославль (40° восточной долготы) западнее Хабаровска (135° восточной долготы); Хабаровск западнее Торонто (80° западной долготы), но Ярославль восточнее Торонто.

Пример. Пусть aBb – отношение на множестве островов некоторого архипелага, состоящее в том, что остров b является ближайшим для острова a (если допустить, что среди попарных расстояний могут быть равные, то ближайших для a может оказаться несколько). Отношение B разумно считать определенным только для пар различных элементов, и, поэтому, нерефлексивным: иначе ближайшим к каждому острову будет он сам и только он. Отношение B , вообще говоря, несимметрично, поскольку если b – ближайший для a , то для b ближайшим может оказаться как a , так и какой-то третий остров c . Наконец, отношение B не является транзитивным, что очевидно, например, для трех островов, расположенных на одной прямой или вообще не в вершинах равностороннего треугольника.

В табл.1 сведены характеристики рассмотренных выше отношений

$R_1 - R_4$.

	рефл.	антирефл.	симм.	антисимм.	транз.
R_1	—	+	—	+	+
R_2	+	—	—	+	+
R_3	+	—	—	+	—
R_4	—	—	+	—	+

Для рефлексивного (соответственно, антирефлексивного) отношения все диагональные элементы матрицы равны 1 (соответственно, 0), а схема в каждой вершине имеет (соответственно, не имеет) петлю. Матрица симметричного (соответственно, антисимметричного) отношения симметрична относительно главной диагонали, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$ (соответственно, $a_{ij} \neq a_{ji}$), а схема вместе с каждой стрелкой содержит (соответственно, не содержит) противоположно направленную.

Транзитивное замыкание бинарного отношения R есть $\hat{R}$. бинарное отношение $\hat{R}$ такое, что $a\hat{R}b$ (т.е. элементы a, b находятся в отношении $\hat{R}$), если существует цепочка $c_1, c_2, \dots, c_k$, для которой $aRc_1, c_1Rc_2, \dots, c_kRb$ } Например, для отношения "быть сыном" транзитивным замыканием является отношение "быть прямым потомком по мужской линии". Для отношения на множестве квартир дома "иметь общую стену" транзитивное замыкание – это отношение "находиться на одном этаже". Отношение $\hat{R}$, конечно, транзитивно.

§4. Отношения эквивалентности

Отношение эквивалентности – бинарное отношение, являющееся рефлексивным, симметричным и транзитивным.

Примеры. 1) Рассмотренные выше отношения равенства, параллельности прямых.

2) Отношение подобия треугольников.

3) Отношение между элементами множества всех многоугольников: "иметь одинаковое число сторон".

4) Бинарное отношение пропорциональности P между парами чисел (X, Y) и (Z, T) : $(X, Y)P(Z, T)$, если $X/Y = Z/T$.

5) Упомянувшееся выше отношение между целыми числами – "иметь одинаковые остатки от деления на 7".

Пусть на множестве M введено некоторое отношение эквивалентности R . Для каждого элемента $\alpha \in M$ рассмотрим множество $M_\alpha = \{\beta : \alpha R \beta\}$ элементов $\beta \in M$, эквивалентных α . В силу симметричности и транзитивности отношения R , если $\alpha R \beta$, то $M_\alpha = M_\beta$. Если же $\alpha \bar{R} \beta$, то $M_\alpha \cap M_\beta = \emptyset$; иначе, если бы существовал элемент $\gamma \in M_\alpha \cap M_\beta$, то выполнялось бы $\alpha R \gamma$ и $\beta R \gamma$ и, в силу

транзитивности R , $\alpha R \beta$.

Таким образом, система различных множеств $\{M_\alpha\}$ – разбиение множества M (полнота разбиения обусловлена рефлексивностью R), и тем самым, каждое отношение эквивалентности на множестве порождает разбиение этого множества на **классы эквивалентности бинарного отношения R на множестве M** – систему подмножеств множества M такую, что

- 1) любые два элемента из одного класса эквивалентны;
- 2) любые два элемента из разных классов не эквивалентны.

Верно и обратное. Любое разбиение множества M можно рассматривать как отношение эквивалентности, в котором находятся пары элементов, отнесенные к одному и тому же классу разбиения, и не находятся элементы из разных классов.

Группировку объектов, применяемую в статистике, законодательстве (например, разделение предприятий на малые, средние и крупные для установления нормативов, единых для всех элементов группы) и в других областях, можно рассматривать как установление эквивалентности.

Классы эквивалентности для примеров 2 – 5.

(2) – множества подобных друг другу треугольников; в разных классах – треугольники разной формы.

(3) – счетное множество классов: в n -й класс входят все n -угольники.

(4) – пары чисел (X, Y) , имеющих одинаковое значение частного X/Y .

(5) – 7 классов чисел N_i ($i=0, 1, \dots, 6$), имеющих остаток i при делении на 7. Класс N_i содержит числа вида $7n+i$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Например, для $i=4$ класс N_4 – это множество $(\dots, -10, -3, 4, 11, 18, 25, \dots)$.

Рассмотрим еще один важный **пример**. Определим отношение $\mathcal{E}$ между множествами следующим образом: $\mathcal{E}(L, M)$, или короче – $L \mathcal{E} M$, если существует взаимно однозначное соответствие между множествами L и M . Можно показать, что $\mathcal{E}$ является отношением эквивалентности. Действительно, если для трех множеств L, M, K выполнено $L \mathcal{E} M$ и $M \mathcal{E} K$, то элементу $l \in L$ соответствует некоторый

элемент $m \in M$, а элементу m соответствует элемент $k \in K$; тогда $L \ni K$, поскольку можно сопоставить элементу l элемент k . Классы эквивалентности состоят при этом из множеств, имеющих одинаковую мощность (для конечных множеств – одинаковое число элементов).

§5. Отношения порядка

Важный тип бинарных отношений – отношения порядка.

Отношение строгого порядка – бинарное отношение, являющееся антирефлексивным, антисимметричным и транзитивным:

обозначение – $a \prec b$ (a предшествует b). Примерами могут служить отношения “больше”, “меньше”, “старше” и т.п. Для чисел обычное обозначение – знаки “<”, “>”.

Отношение нестрогого порядка – бинарное рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение. Наряду с естественными примерами нестрогих неравенств для чисел примером может служить отношение между точками плоскости или пространства “находиться ближе к началу координат”. Нестрогое неравенство для целых и действительных чисел можно также рассматривать как дизъюнкцию отношений равенства и строгого порядка.

Если в спортивном турнире не предусматривается дележа мест (т.е. каждый участник получает определенное, только ему присужденное место), то это пример строгого порядка; в противном случае – нестрогого.

Отношения порядка устанавливаются на множестве, когда для некоторых или всех пар его элементов определяется отношение

предшествования $a \prec b$. Задание для множества некоторого отношения порядка называется его **упорядочением**, а само множество в результате этого становится **упорядоченным**. Отношения порядка могут вводиться разными способами. Для конечного множества любая перестановка его элементов задает некоторый строгий порядок. Бесконечное множество можно упорядочить бесконечным множеством способов. Представляют интерес только те упорядочения, которые имеют содержательный смысл.

Если для отношения порядка R на множестве M и некоторых различных элементов $a, b \in M$ выполняется хотя бы одно из отношений

aRb или bRa , то элементы a и b называются **сравнимыми**; в противном случае – **несравнимыми**.

Полностью (или линейно) упорядоченное множество M – множество, на котором задано отношение порядка, причем любые два элемента множества M сравнимы; **частично упорядоченное множество** – то же, но допускаются пары несравнимых элементов.

Линейно упорядоченным является множество точек на прямой с отношением “правее”, множества целых, рациональных, действительных чисел по отношению “больше” и т.п.

Примером частично упорядоченного множества могут служить трехмерные векторы, если порядок задан так: $(a, b, c) \prec (a', b', c')$, если

$(a \prec a') \& (b \prec b') \& (c \prec c')$, т.е. если предшествование выполнено по всем трем координатам: векторы (2, 8, 5) и (6, 9, 10) сравнимы, а векторы (2, 8, 5) и (12, 7, 40) не сравнимы. Этот способ упорядочения можно распространить на векторы любой размерности: вектор

$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ предшествует вектору $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$: $\alpha \prec \beta$, если

$\alpha \neq \beta$ и выполнено $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, \dots, a_n \leq b_n$.

На множестве векторов можно рассмотреть и другие примеры упорядочения:

1) частичный порядок: $(a, b, c) \prec (d, e, f)$, если $a^2 + b^2 + c^2 < d^2 + e^2 + f^2$, т.е. по длине векторов; несравнимыми являются векторы одинаковой длины.

2) линейный порядок: $(a, b, c) \prec (d, e, f)$, если $a < d$; если $a = d$, то $b < e$; если же $a = d$ и $b = e$, то $c < f$.

Последний пример представляет понятие алфавитного порядка.

Алфавит – это кортеж попарно различных символов, называемых буквами алфавита. Примером служит алфавит любого европейского языка, а также алфавит из 10 арабских цифр. В компьютере клавиатура и некоторые вспомогательные средства определяют алфавит допустимых символов.

Слово в алфавите A – кортеж из символов алфавита A . Слово записывается символами алфавита подряд, слева направо, без пробелов. Натуральное число является словом в цифровом алфавите. Формула не всегда является словом из-за нелинейного расположения символов: наличие надстрочных (показатели степени) и подстрочных (индексы переменных, основания логарифмов) символов, дробная черта, знаки радикалов и др.; однако путем некоторых соглашений она может быть приведена к записи в строку, что и применяется, например, в компьютерном программировании (так, знак возведения в степень записывается как 2 знака умножения подряд: $5^{**}3$ означает третью степень числа 5).

Лексико-графическое (алфавитное) упорядочение – для различных слов α, β в алфавите $A = [a_i]$ с упорядоченными

символами $a_1\{a_2\}\dots\{a_n\}$ устанавливается упорядочение: $\alpha\{\beta\}$, если возможно представление $\alpha = \gamma a_i \delta'$, $\beta = \gamma a_j \delta''$, при котором либо $a_i\{a_j\}$ (подслово γ может быть пустым), либо $a_i = a_j$ и δ' – пустое подслово. В этом определении γ – префикс (начальное подслово), одинаковый у обоих слов α, β ; a_i и a_j – либо первые по счету слева различные символы, либо a_i – последний символ в слове α ; δ', δ'' – хвостовые подслово.

Таким образом, алфавитное упорядочение слов определяется первым слева различающим их символом (например, слово КОНУС предшествует слову КОСИНУС, поскольку они впервые различаются в третьей букве, и Н предшествует С в русском алфавите). Считается также, что символ пробела предшествует любому символу алфавита – для случая, когда одно из слов является префиксом другого (например, КОН и КОНУС).

Упражнение. Проверьте, что алфавитное упорядочение натуральных чисел, имеющих одинаковое число разрядов в десятичной записи, совпадает с упорядочением их по величине.

Пусть A – частично упорядоченное множество. Элемент $a \in A$ называется **максимальным** в A , если не существует элемента $b \in A$, для которого $a < b$. Элемент a называется **наибольшим** в A , если для всякого отличного от a элемента $b \in A$ выполнено $b < a$. Симметричным образом определяются **минимальный** и **наименьший** элементы. Понятия наибольшего и максимального (соответственно, наименьшего и минимального) элементов различны – см. пример на рис.14. Множество на рис.14,а имеет наибольший элемент p , он же является максимальным; минимальных элементов два: s и t , наименьшего нет. На рис.14,б, напротив, множество, имеющее два максимальных элемента i и j , наибольшего нет, минимальный, он же наименьший – один: m .

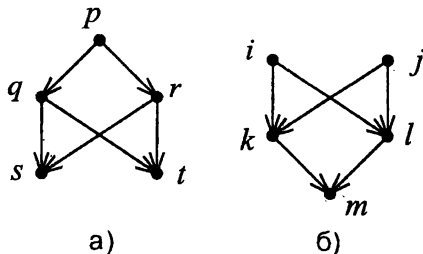


Рис. 14

Вообще, если у множества есть наибольший (соответственно, наименьший) элемент, то только один (может не быть ни одного).

Максимальных и минимальных элементов может быть несколько (может не быть совсем – в бесконечном множестве; в конечном случае – обязательно есть).

Разберем еще два примера. $X:Y$ – отношение на множестве N : “ Y делит X ”, или “ X является делителем числа Y ” (например, $5:1$, $35:7$) является рефлексивным и транзитивным. Рассмотрим его на конечном множестве $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ делителей числа 30.

Отношение $X:Y$ является отношением частичного порядка (нестрогого) и изображается следующей матрицей порядка 8, содержащей 31 знак “+”.

X: \ Y:	1	2	3	5	6	10	15	30
1	+	–	–	–	–	–	–	–
2	+	+	–	–	–	–	–	–
3	+	–	+	–	–	–	–	–
5	+	–	–	+	–	–	–	–
6	+	+	+	–	+	–	–	–
10	+	+	–	+	–	+	–	–
15	+	–	+	+	–	–	+	–
30	+	+	+	+	+	+	+	+

Табл. 2

Соответствующая схема с 8 вершинами должна содержать 31 связку. Однако она будет более удобна для обозрения, если исключить 8 связок-петель, изображающих рефлексивность отношения $X:Y$ (диагональные элементы матрицы) и транзитивные связки, т.е. связки $X:Y$, если есть промежуточное число Z такое, что $X:Z$ и $Z:Y$ (например, связку $30:3$, поскольку $30:15$ и $15:3$). Тогда в схеме останется 12 связок (рис. 15); недостающие звенья подразумеваются “по транзитивности”. Число 1 является наименьшим, а число 30 наибольшим элементами в D_{30} . Если исключить из D_{30} число 30 и рассмотреть тот же частичный порядок на множестве $D_{30} \setminus \{30\}$, то наибольшего элемента нет, но имеются 3 максимальных элемента: 6, 10, 15.

Теперь построим такую же схему для отношения $s \subseteq t$ на булеане (множестве всех подмножеств) $B(M_3)$ трехэлементного множества

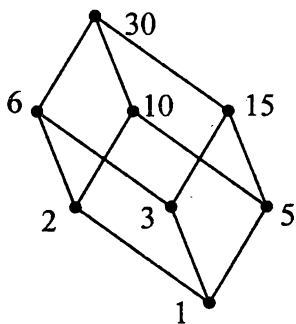


Рис. 15.

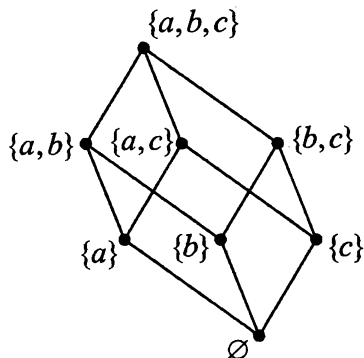


Рис. 16.

$M_3 = \{a, b, c\}$. $B(M_3)$ содержит 8 элементов:

$$B(M_3) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Проверьте, что если сопоставить элементам a, b, c , соответственно числа 2, 3, 5, а операции объединения множеств – умножение соответствующих чисел (т.е., например, подмножеству $\{a, c\}$ отвечает произведение $2 \cdot 5 = 10$), то матрица отношения $s \subseteq t$ будет точно такой же, как для отношения $X:Y$; схемы этих двух отношений с описанными сокращениями петель и транзитивных связей с точностью до обозначений совпадают (см. рис.16). Наименьшим элементом является $\emptyset$, а наибольшим – $\{a, b, c\}$.

Бинарные отношения R на множестве A и S на множестве B называются **изоморфными**, если между A и B можно установить взаимно однозначное соответствие Γ , при котором, если $a_1 R a_2$ (т.е. элементы a_1 и a_2 находятся в отношении R), то $\Gamma(a_1) S \Gamma(a_2)$ (образы этих элементов находятся в отношении S).

Так, частично упорядоченные множества D_{30} и $B(M_3)$ изоморфны. Рассмотренный пример допускает обобщение.

Отношение $M \subseteq N$ на булеане $B(E)$ есть частичный порядок. Если $|E| = n$, т.е. множество E содержит n элементов $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, то каждому подмножеству $M \in B(E)$ соответствует n -мерный вектор с

компонентами $\chi_M(e_i)$, где χ_M – характеристическая функция множества M . Совокупность всех таких векторов можно рассматривать как множество точек n -мерного арифметического пространства с координатами 0 или 1, или, по-другому, как вершины n -мерного единичного куба, обозначаемого E^n , т.е. куба с ребрами единичной длины. Для $n = 1, 2, 3$ указанные точки представляют собой соответственно концы отрезка, вершины квадрата и куба – отсюда общее название. Для $n = 4$ графическое изображение этого отношения – на рис. 17. Около каждой вершины 4-мерного куба указано соответствующее подмножество 4-элементного множества $\{a, b, c, d\}$ и четырехмерный вектор, представляющий характеристическую функцию этого подмножества. Соединены между собой вершины, отвечающие подмножествам, которые различаются присутствием ровно одного элемента.

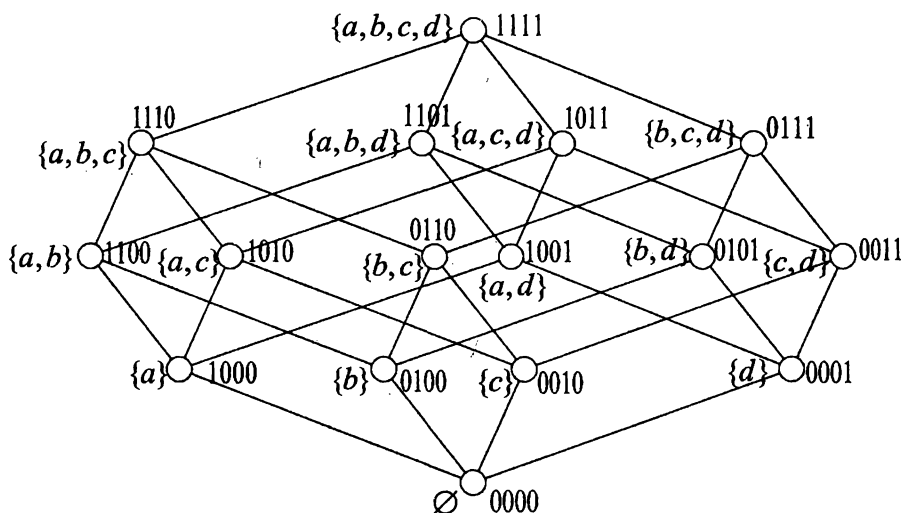


Рис. 17.

На рис.17 четырехмерный куб E^4 изображен так, что на одном уровне расположены попарно не сравнимые элементы, содержащие одинаковое число единиц в записи (от 0 до 4), или, по-другому, одинаковое число элементов в представляемых подмножествах.

На рис.18а,б – другие наглядные представления 4-мерного куба; на рис.18а ось первой переменной OX направлена вверх (намеренное отклонение от вертикали, чтобы не сливались различные ребра куба):

при этом 3-мерный подкуб, соответствующий $X = 0$ расположен ниже, а для $X = 1$ – выше. На рис.186 та же ось OX направлена изнутри куба наружу: внутренний подкуб соответствует $X = 0$, а внешний – $X = 1$.

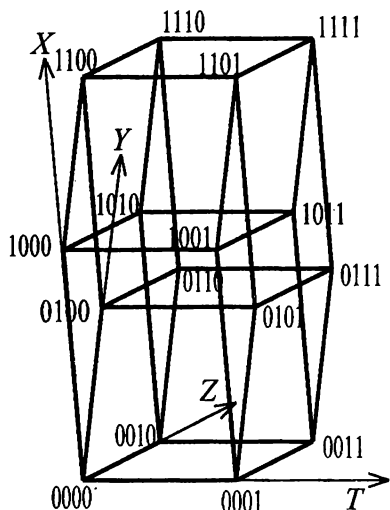


Рис. 18а.

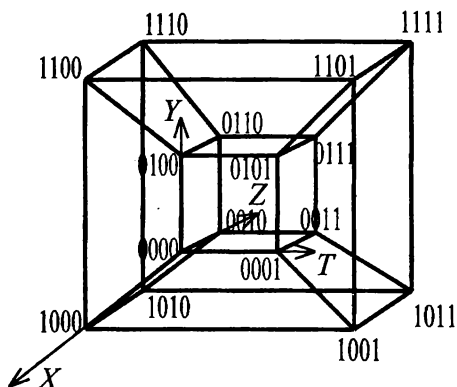


Рис. 18б.

В файле материалов приведено изображение 5-мерного единичного куба E^5 (стр.134).

ГЛАВА 2. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ

§1. Операции на множестве

Ранее рассматривались операции над множествами и их подмножествами, такие как объединение, пересечение, разность, дополнение. Результатом операции являлось некоторое множество. Теперь рассмотрим операции над элементами множества, результатом которых являются снова элементы этого же или другого множества. Раздел математики, изучающий общие свойства операций называется общей алгеброй, наряду с другими разделами: линейной алгеброй, векторной алгеброй, матричной алгеброй.

n -арная операция на множестве M – отображение φ типа:

$M^n \rightarrow M$, где M – произвольное множество, не обязательно числовое; обозначение: $\varphi(m_1, m_2, \dots, m_n) = m$. Для $n=2$ операция называется бинарной и вместо $\varphi(a, b)$ употребляется $a\varphi b$ (ср. $a+b$, $a-b$, ab и т.п.).

Частным случаем n -арной операции, когда M – числовое множество, является n -местная функция. Если же M – множество функций, то употребляют термин **оператор**: примером могут служить операторы дифференцирования функции одной или нескольких действительных переменных, ставящие в соответствие каждой функции ее производную или частную производную.

Множество M называется **замкнутым относительно операции φ** , если выполнено условие $\forall a \in M : \varphi(a) \in M$, т.е. применение операции не выводит за пределы множества M .

Примеры. 1) Множества действительных, рациональных, целых чисел замкнуты относительно операций сложения, вычитания, умножения, причем первые два множества замкнуты и относительно операции деления (исключая деление на 0). Множество целых чисел не замкнуто относительно деления.

2) Множество четных целых чисел замкнуто относительно операций сложения и умножения: сумма и произведение четных чисел также четны. Напротив, множество нечетных чисел не замкнуто относительно тех же операций.

Если для некоторой операции φ рассмотреть отношение $R : \alpha R \beta$, если $\beta = \varphi(\alpha)$ или $\alpha = \varphi(\beta)$, то для любых двух элементов γ, δ

множества, замкнутого относительно операции Φ , выполнено $\gamma \hat{R} \delta$, где $\hat{R}$ – транзитивное замыкание отношения R .

§2. Свойства бинарных операций

Ассоциативной бинарной операцией называется операция, если она обладает свойством $(a\Phi b)\Phi c = a\Phi(b\Phi c)$. Ассоциативность позволяет записывать последовательность таких операций без скобок: $a\Phi b\Phi c$. Ср. в арифметике формулы $a+b+c$, $abcd$. Примером ассоциативных операций служат объединение и пересечение множеств. Операция деления не ассоциативна: $(24:3):4 = 2$, тогда как $24:(3:4) = 24 : 3/4 = 32$. Также не ассоциативно вычитание. Проверьте это. Поэтому для бесскобочной записи $20-5-7$ принято специальное соглашение: она означает $(20-5)-7$, но не $20-(5-7)$.

Коммутативной бинарной операцией называется операция, обладающая свойством перестановочности: $a\Phi b = b\Phi a$.

Примеры. Сложение и умножение чисел, сложение и скалярное умножение векторов, сложение поворотов плоскости вокруг начала координат, вычисление частных производных функции нескольких переменных (напомним равенство смешанных частных производных второго порядка $\partial^2 z / \partial x \partial y = \partial^2 z / \partial y \partial x$). Примером некоммутативной операции являются вычитание и деление чисел, умножение квадратных матриц.

Ассоциативными и коммутативными являются операции $\max(X, Y)$ и $\min(X, Y)$ на множестве чисел; поэтому можно употреблять записи $\max(X, Y, Z, T)$, $\min(A, B, C)$.

Для описанных в п.1.2. функциональных элементов, реализующих некоммутативные операции, необходимо правильное присоединение подсхем-аргументов к входам; различный порядок присоединения реализует разные функции. Обычно считается, что входы элемента упорядочены слева направо, и у 2-местного элемента левый вход соответствует первой переменной, правый – второй. Так, для операции вычитания оба варианта присоединения показаны на рис.7.

Дистрибутивность бинарной операции выражает распределительный закон, подобный арифметическому соотношению $(a+b)c = ac + bc$.

Дистрибутивность слева бинарной операции Φ относительно бинарной операции Ψ – свойство, состоящее в том, что

$$a\psi(b\varphi c) = (a\varphi b)\psi(a\varphi c).$$

Свойством дистрибутивности в арифметике обладает умножение относительно сложения, но не сложение относительно умножения:

$$ab + c \neq ac + bc.$$

Дистрибутивность справа бинарной операции φ относительно бинарной операции ψ – свойство, состоящее в том, что

$$(a\psi b)\varphi c = (a\varphi c)\psi(b\varphi c).$$

Дистрибутивность операций позволяет раскрывать скобки в формулах.

Вернемся к перечню свойств операций над множествами, приведенному в п.1.1. Можно видеть, что свойства 1-2 выражают коммутативность, а свойства 3-4 – ассоциативность операций $\cup$ и $\cap$, свойства 5-6 – взаимную дистрибутивность. Свойства 1-10 относятся только к операциям объединения и пересечения. Законы де Моргана 11, 12 связывают все три операции. Свойства 13-20 связаны с операциями над пустым множеством $\emptyset$ и универсальным множеством U .

§3. Алгебры

Алгебра – не только математическая дисциплина. Тот же термин обозначает вполне определенную структуру. **Алгеброй** называется множество M вместе с заданной на нем системой операций $\Omega = (\varphi_i)$.

Ω называется сигнатурой алгебры, а M – носителем. Обозначение: $A = (M; \Omega) = (M; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$.

Примеры. 1) $(R; +, \cdot)$, $(N; +, \cdot)$, $(Z; +, \cdot)$ – алгебры на множестве соответственно, действительных, натуральных и целых чисел с операциями сложения и умножения.

2) $(F; D)$ и $(F_3; D) \cdot F$ – множество дифференцируемых функций действительной переменной, F_3 элементарных функций; D – оператор дифференцирования, ставящий в соответствие каждой функции ее производную.

Подобно изоморфизму отношений рассматривается **изоморфизм двух алгебр** $A = (M; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$ и $B = (N; \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k)$ – взаимно однозначное соответствие Γ между множествами M и N и

операциями и φ_i, ψ_i при котором выполнено:

$$\Gamma(\varphi_i(m)) = \psi_i(\Gamma(m)) \text{ для всех } m, \varphi_i, \psi_i.$$

Подчеркнем, что изоморфизм – это не просто взаимно однозначное соответствие (его – для конечных множеств – можно установить между любыми двумя множествами с одинаковым числом элементов). Смысл этого понятия состоит в том, что если выполнить в алгебре A какие-либо операции над определенными элементами множества M и соответствующие операции в алгебре B над соответствующими элементами множества N , то результаты операций также будут соответствовать друг другу.

Примеры. 1) Алгебры $(Z; +)$ и $(Z_3; +)$, где Z_3 – множество целых чисел, кратных трем, изоморфны, в силу соответствия $\Gamma = n \rightarrow 3n$. Так, например, сложению $5 + 8 = 13$ будет соответствовать сложение $15 + 24 = 39$, что можно проиллюстрировать схемой

$$\begin{array}{cccc} n: & 5 & + & 8 = 13 \\ & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 3n: & 15 & + & 24 = 39 \end{array}$$

2) Алгебры $(R_+; \cdot)$ и $(R; +)$, где R_+ – множество положительных действительных чисел, изоморфны, в силу соответствия $\Gamma = a \rightarrow \log a$ (ввиду тождества $\log ab = \log a + \log b$). Это также проиллюстрируем схемой

$$\begin{array}{ccccccc} a: & 8 & \cdot & 64 & = & 512 \\ & \downarrow \log_2 & & \downarrow \log_2 & & \downarrow \log_2 & \downarrow \\ \log_2 a: & 3 & + & 6 & = & 9 \end{array} \quad (3 = \log_2 8; 6 = \log_2 64; 9 = \log_2 512)$$

В этом примере только для наглядности участвуют целые степени числа 2, чтобы их двоичные логарифмы были целыми числами.

3) Алгебры $(M; \cup)$ и $(M; \cap)$ на булеане $B(M)$ произвольного множества M изоморфны. Изоморфизм устанавливается соответствием $\Gamma(L) = \bar{L}, L \subseteq M$. В самом деле, $\Gamma(L_1 \cup L_2) = \overline{L_1 \cup L_2} = [\text{в силу закона де Моргана}] = \bar{L}_1 \cap \bar{L}_2 = \Gamma(L_1) \cap \Gamma(L_2)$.

Противоположный пример: алгебры $(Z; +)$ и $(Z^2; +)$, где Z^2 – множество целочисленных двумерных векторов, не изоморфны. Хотя оба множества Z и Z^2 – счетны, т.е. между ними можно (многими способами) установить взаимно-однозначное соответствие, но не удастся сделать это так, чтобы сумма векторов, поставленных в соответствие двум числам всегда соответствовала сумме этих чисел. Конечно, это требует доказательства, но мы его здесь не приводим.

Особое значение имеет следующий пример.

Алгебра $(B(E); \cup, \cap, -)$, т.е. алгебра на булеане $B(E)$ с операциями объединения, пересечения и дополнения называется **алгеброй множеств на множестве E** , или **алгеброй Кантора**.

Частично упорядоченное множество элементов булеана $B(E)$ имеет наименьший элемент $\emptyset$ и наибольший E . Для системы подмножеств множества E выполняются свойства 1-21, приведенные в §1 главы 1.

Пример для двух- и трехэлементного множества E фактически рассмотрен в §1 главы 1. Если трактовать операцию $\cup$ как сложение, операцию $\cap$ как умножение, а операцию дополнения $\bar{A}$ как $(-A)$, то некоторые, но не все, из равенств 1-21 схожи с соответствующими свойствами арифметических действий над числами: 1-4 – коммутативность и ассоциативность сложения и умножения, 5 – дистрибутивность умножения относительно сложения, 7-10 и 15-18 напоминают свойства функций $\max$ и $\min$; $\emptyset$ играет роль нуля при сложении и умножении, а U – роль единицы при умножении. Подробнее эта аналогия разбирается в гл.3.

Изоморфизм между отношением $M \subseteq N$ на булеане $B(E)$ n -элементного множества E и отношением делимости на множестве D_H делителей натурального числа H , если H есть произведение n **различных** простых чисел, можно распространить на изоморфизм между алгебрами. Для этого достаточно определить на множестве делителей H операции $\text{НОК}(a, b)$ – наименьшее общее кратное чисел a и b , $\text{НОД}(a, b)$ – наибольший общий делитель чисел a и b и поставить в соответствие простым делителям числа H одноэлементные подмножества множества E (для простоты будем обозначать их теми же символами: $a, b, \dots$). Тогда для соответствия (обозначаемого

символом $\leftrightarrow$) между подмножествами E и произведениями различных простых делителей H выполнены соотношения:

$E \leftrightarrow D_H$, $a \cup b \leftrightarrow \text{НОК}(a, b)$, $a \cap b \leftrightarrow \text{НОД}(a, b)$, $\bar{a} \leftrightarrow H/a$,
и это соответствие есть изоморфизм.

Как видно из рассмотренных примеров, если алгебры A и B изоморфны, то элементы и операции B можно переименовать так, что B совпадет с A . Из основного равенства в определении изоморфизма следует, что любое эквивалентное соотношение в алгебре A сохраняется в каждой изоморфной ей алгебре B . Это позволяет, получив такие соотношения в алгебре A , автоматически распространить их на все алгебры, изоморфные A . Распространенное в математике выражение “рассматривать объекты с точностью до изоморфизма” означает, что рассматриваются только те свойства объектов, которые сохраняются при изоморфизме, т.е. являются общими для всех изоморфных объектов. В частности, изоморфизм сохраняет ассоциативность, коммутативность и дистрибутивность.

Установление изоморфизма между какими-либо системами имеет большое практическое значение. Оно сродни точному переводу на другой язык описания явлений. Когда, например, аналитическая геометрия устанавливает соотношения между геометрическими объектами – линиями или поверхностями и их аналитическими представлениями в виде уравнений, или в курсе математического анализа мы выясняем геометрический смысл производной, дифференциала или интеграла, мы получаем возможность выбирать и использовать при исследованиях и в прикладных задачах наиболее удобное для данного случая представление. В некоторых задачах изоморфизм систем служит основанием для моделирования объектов и их взаимодействия.

§4. Операции над двоичными числами

Каждому с детства привычен способ записи чисел в десятичной системе. Эта система называется **позиционной десятичной**, потому что натуральное число представляется словом в алфавите из десяти **арабских** цифр $C_{10} = [0, 1, 2, 3, \dots, 9]$, причем знаки числа изображают различные его составляющие в зависимости от **разряда** – позиции в числе и служат коэффициентами при степенях 10. Например, $48087 = 40000 + 8000 + 80 + 7 = 4 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$, и цифра 8 во втором разряде изображает число 80, а та же цифра в четвертом разряде – число 8000. Позиционная система исторически

вытеснила другие способы представления чисел благодаря удобствам использования, главным образом, из-за достаточно простых алгоритмов арифметических действий над многозначными числами, которые сводятся к действиям над однозначными числами. При этом используются таблица сложения, т.е. правила типа $3+6=9$, $4+8=12$ и т.п., общеизвестная таблица умножения и – при сложении и умножении столбиком – правила переноса десятков в старшие разряды (“шестью девять – пятьдесят четыре; четыре пишем, пять в уме”). Отметим, что при сложении столбиком справа налево двух слагаемых каждый очередной знак суммы определяется знаками слагаемых в этом разряде с учетом знака переноса (0, если сумма не превышает 9, или 1, если сумма двузначная). При умножении многозначных чисел $A \times B$ столбиком каждое умножение A на однозначное число, каким является очередной разряд числа B , также сопровождается переносом числа десятков в следующий разряд. Далее следует сложение нескольких многозначных чисел, записываемых со сдвигом. При сложении большого количества чисел может возникать накопление знаков переноса. Важно заметить, что как при сложении, так и при умножении каждый знак результата зависит от знаков слагаемых/сомножителей, находящихся в том же разряде и правее, и не зависит от старших разрядов (находящихся левее). Так, младший разряд результата является функцией двух однозначных чисел – младших разрядов слагаемых/сомножителей. Второй справа разряд есть функция 4 однозначных переменных – знаков двух младших разрядов слагаемых/сомножителей и т.д.

Таким же образом, только много проще, устроена **двоичная система счисления**. Числа представляются словами в алфавите

$\mathcal{C}_2 = [0,1]$, и, например, $110100101_2 = 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2^2 + 2^0 = (256 + 128 + 32 + 4 + 1)_{10} = 421_{10}$ (подстрочные индексы 2 и 10 обозначают, что одно число записано в двоичной, а другое – в десятичной системе). Вот двоичные представления нескольких первых натуральных чисел (в левом столбце – десятичные; в правом – двоичные):

0 - 0	7 - 111	14 - 1110
1 - 1	8 - 1000	15 - 1111
2 - 10	9 - 1001	16 - 10000
3 - 11	10 - 1010	17 - 10001
4 - 100	11 - 1011	18 - 10010
5 - 101	12 - 1100	19 - 10011
6 - 110	13 - 1101	и т.д.

Подобно тому, как в десятичной системе счисления целые степени основания системы 10 записываются единицей с нулями, а число на 1 меньшее - $99...9$, в двоичной системе число $10...0$ с k нулями изображает число 2^k , а число $11...1$ из k единиц равно $2^k - 1$.

Таблица сложения для двоичных чисел чрезвычайно проста:

$0 + 0 = 0$; $0 + 1 = 1 + 0 = 1$; $1 + 1 = 10$.

Таблица умножения еще проще:

$0 \times 0 = 0 \times 1 = 1 \times 0 = 0$; $1 \times 1 = 1$.

Их можно представить и таблицами с двумя входами:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

x	0	1
0	0	0
1	0	1

Отсюда – простота действий над многозначными числами, хотя двоичная запись числа длиннее десятичной более, чем втрое. Предыдущий пример демонстрирует перевод двоичного числа в десятичное. Для этого, так же как и для обратного перехода полезно знать значения целых степеней числа 2: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256,

512, 1024 и т.д. Например, $179 = 128 + 51 = 2^7 + 32 + 19 =$

$= 2^7 + 2^5 + 16 + 3 = 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2 + 1$ поэтому двоичная запись числа

179 – 10110011 (слагаемые $2^6, 2^3, 2^2$ входят в сумму 179 с коэффициентом 0, остальные степени 2 – с коэффициентом 1). Ниже – примеры арифметических действий над двоичными числами (параллельно приведены действия с теми же числами в десятичной записи).

$$1) \quad 110101 = 32 + 16 + 4 + 1 = 53$$

$$\begin{array}{r} + \\ 11101 = 16 + 8 + 4 + 1 = 29 \\ \hline 1010010 = 64 + 16 + 2 = 82 \end{array}$$

$$2) \quad 1010 = 8 + 2 = 10$$

$$\begin{array}{r} \times \\ 101011 = 32 + 8 + 2 + 1 = 43 \\ \hline 1010 \\ 1010. \\ 1010... \\ 1010..... \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1010..... \\ \hline 110101110 = 256 + 128 + 32 + 8 + 4 + 2 = 430 \end{array}$$

$$3) \quad 110110 = 32 + 16 + 4 + 2 = 54$$

$$\begin{array}{r} - \\ 11101 = 16 + 8 + 4 + 1 = 29 \\ \hline 11001 = 16 + 8 + 1 = 25 \end{array}$$

Как видим, сложение, вычитание и умножение многозначных двоичных чисел производится так же, как и для десятичных, в частности, в обеих системах k -й знак результата арифметических действий зависит от k -х знаков слагаемых/сомножителей и знаков младших разрядов. Однако накопление знаков переноса при сложении возникает здесь значительно чаще: каждые две единицы дают перенос одной единицы в следующий – старший – разряд, сложение четырех единиц дает две единицы переноса, т.е. перенос одной единицы на два разряда влево.

Деление двоичных чисел “столбиком” также намного проще, чем в десятичной системе, поскольку не приходится подбирать очередной знак

частного: остаток не должен быть меньше делителя, – в этом случае знак частного 1; в противном случае, как и для десятичных чисел он равен 0, и нужно приписать к остатку (снести) очередной разряд делимого.

Рассмотрим последовательность D_n всех двоичных наборов длины n в лексикографическом порядке. Если их прочесть как двоичные числа, игнорируя начальные нули, то это будет начальный отрезок натурального ряда от 0 до $(2^n - 1)$. Для любого $k < 2^{n-1}$ сумма k -го от начала числа d_k и k -го от конца d_{2^n-k} равна одному и тому же числу $(2^n - 1)$, которое в двоичной записи состоит из n единиц. При вычитании из двоичного числа $(2^n - 1)$ любого меньшего числа не требуется заимствования единиц из старших разрядов (подобно вычитанию из числа 99...9 в десятичной системе), и единице в вычитаемом соответствует ноль в разности, и наоборот, нулю в вычитаемом отвечает единица в разности. Поэтому двоичные знаки числа d_k противоположны соответствующим знакам числа d_{2^n-k} . Другими словами, таблица D_n антисимметрична относительно своей середины.

Таблица D_n , строки которой суть наборы из 0 и 1 длины n , может быть построена по индуктивному правилу:

- 1) таблица D_1 – это столбец из двух однозначных чисел 0 и 1;
- 2) таблица D_k получается из двух экземпляров таблицы D_{k-1} : к первому из них присоединяется слева столбец из 2^{k-1} нулей, а ко второму – столбец из 2^{k-1} единиц. Расположенные одна под другой, обе таблицы образуют таблицу D_k из 2^k строк.

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_n = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{\phantom{D_{n-1}}} \\ 0 & \boxed{\phantom{D_{n-1}}} \\ \vdots & \boxed{\phantom{D_{n-1}}} \\ 0 & \boxed{\phantom{D_{n-1}}} \\ 1 & \boxed{\phantom{D_{n-1}}} \\ 1 & \boxed{\phantom{D_{n-1}}} \\ \vdots & \boxed{\phantom{D_{n-1}}} \\ 1 & \boxed{\phantom{D_{n-1}}} \end{bmatrix}$$

ГЛАВА 3. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

§1. Представления логических функций

В базовом курсе содержались элементы математической логики: истинные и ложные высказывания и операции над ними. Теперь рассмотрим те же и другие понятия и соотношения, используя функциональный язык. Будем считать простые высказывания независимыми переменными, сопоставив истинным высказываниям значение 1, а ложным – значение 0. Тогда операции над высказываниями представляют собой функции этих переменных. Введем необходимые понятия.

Логические переменные – это переменные, принимающие значения из двухэлементного множества $B\{0;1\}$. Они называются также **булевыми**, или **двоичными** переменными.

Булева функция (логическая функция, функция алгебры логики) – это функция одной или нескольких переменных $Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$, где $X_1, X_2, \dots, X_n, Z$ – логические переменные, т.е. и значения аргументов, и значение функции – ноль или единица.

Тем самым, булева функция n переменных есть функция на B^n – множестве n -мерных векторов $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, компоненты которых равны 0 или 1: $\sigma_i \in B$. Можно применять векторные обозначения $\tilde{X}, f(\tilde{X})$ для сокращения записи. Пользуясь другими терминами, можно считать областью определения булевой функции множество вершин n -мерного единичного куба E^n .

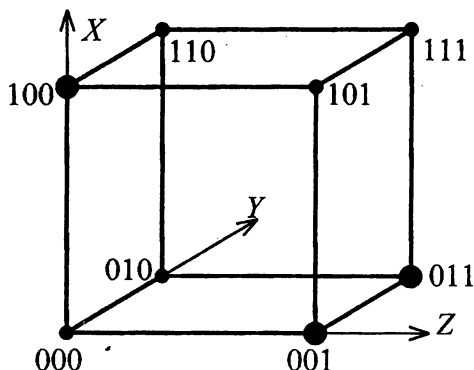


Рис. 19.

На рис.19 изображена функция 3 переменных $f(X, Y, Z)$, принимающая значение 1 на наборах (001), (011), (100). Обратите внимание на допустимую форму записи: можно не разделять запятыми значения аргументов – все они однозначные числа.

Если число переменных равно n и любая из них может независимо от других принимать 2 значения, то число различных n -векторов равно 2^n . Относительно

каждой функции $Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ все множество B^n разбивается на два класса n -векторов: прообраз значения 0 и прообраз значения 1 функции Z . Мы будем рассматривать только всюду определенные функции.

Если считать, что переменные $X_1, X_2, \dots, X_n$ обозначают истинность (значение 1) или ложность (значение 0) высказываний-аргументов, то функция Z выражает истинность или ложность определенного сложного высказывания при различных сочетаниях значений аргументов. Например, конъюнкция двух высказываний – это сложное высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба составляющих простых высказывания. С функциональной точки зрения конъюнкцию можно рассматривать как булеву функцию двух логических переменных, принимающую значение 1 тогда и только тогда, когда оба аргумента равны 1.

Для задания логической функции нужно указать каким-либо образом, какое значение принимает функция на тех или иных наборах значений аргументов. Поэтому естественным является **табличное представление булевых функций** – для функции $Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ – таблица из 2^n строк – n -мерных булевых векторов в алфавитном порядке, каждому из которых сопоставлено значение функции Z , равное 0 или 1. Заметим, что булева функция Z является на B^n характеристической функцией того множества точек B^n , для которых $Z = 1$.

В таблице 5 представлены все функции одной переменной – их 4. В 1-м столбце – значения переменной X ; в каждом из последующих – значения соответствующей функции, обозначение функции – в 1-й строке. Во 2-м столбце – функция-константа $Z \equiv 0$, в 5-м – функция-константа $Z \equiv 1$. В 3-м столбце тождественная функция $Z = X$, в 4-м – функция $Z = \bar{X}$, которую обозначают также $\neg X$ и называют **отрицанием**. Второй способ обозначения подчеркивает, что отрицание – одноместная функция аргумента X .

Аналогично могут быть заданы функции нескольких переменных. Некоторые из них – для двух переменных – в табл.6. Сравните их (столбцы 3-5) с таблицами истинности основных логических операций: конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквивалентности, для которых значения аргументов и результатов операций обозначались буквами I, J . Отметим также, что с **арифметической точки зрения**, т.е. если рассматривать 0 и 1 как натуральные числа с обычными операциями

арифметики, выполнены равенства:

$$\neg X = 1 - X; \quad X \& Y = X \times Y = \min(X, Y);$$

$$X \vee Y = X + Y - XY = \max(X, Y)$$

Поэтому конъюнкцию $X \& Y$ называют умножением и записывают со знаком произведения: $X \times Y$ или вообще – как в алгебре – без знака: XY . Дизъюнкцию иногда удобно называть логическим сложением, а связываемые ею члены – логическими, или дизъюнктивными слагаемыми. Однако следует иметь в виду, что, во-первых, на наборе (1, 1) значение дизъюнкции не совпадает с арифметической суммой, а, во-вторых, термин “сумма” для логических переменных употребляется и в другом значении, представленном в той же табл.6. В двух последних столбцах табл.6 представлены функции, которые не встречались раньше, а именно:

Сумма по модулю 2 – функция двух переменных, равная 0, если значения аргументов совпадают, и 1 в противном случае; ее обозначение – $X \oplus Y$. Арифметическое значение $(X \oplus Y)$ – остаток от деления числа $(X + Y)$ на 2, – отсюда название. Другое название – неэквивалентность, поскольку выполнено тождество: $X \oplus Y = \overline{X \sim Y}$.

Сумма по модулю 2 как бинарная операция обладает свойствами коммутативности и ассоциативности $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$, и поэтому ее можно записывать без скобок $a \oplus b \oplus c$ и переставлять слагаемые.

Штрих Шеффера – функция двух переменных, равная 0 тогда и только тогда, когда оба аргумента равны 1. Обозначение: $X | Y$, условное название “ X несовместно с Y ”. Выполнены тождества:

$$X | Y = \overline{X \& Y} = \bar{X} \vee \bar{Y}.$$

Если принять, что всевозможные наборы значений двух аргументов (как легко видеть, их 4) расположены в таблице в алфавитном порядке, то каждая функция двух переменных полностью задается столбцом значений длины 4. Так же, булевым вектором длины 2^n задается логическая функция n переменных. Для удобства записи можно транспонировать столбец значений в строку и таким сокращенным способом задавать булевы функции. Например, $(0001)^T$ представляет конъюнкцию, $(0111)^T$ – дизъюнкцию, $(1101)^T$ – импликацию; $(11001100)^T$ представляет функцию трех переменных g_2 , заданную в

последнем столбце табл.7. Для получения таблицы нужно приписать слева к столбцу значений стандартный (для каждого n) перечень всех n -наборов, расположенных в алфавитном порядке, т.е. описанную в §4 гл.2 таблицу D_n .

Для задания булевой функции наряду с транспонированным столбцом значений функции можно использовать сокращенную запись: кортеж номеров тех строк таблицы, где функция равна 1 (номера могут быть записаны в десятичной системе в возрастающем порядке).

Например, функцию m_3 из табл.7 можно задать кортежем: [3,5,6,7], а функцию g_2 из той же таблицы – [0, 1, 4, 5]. Это особенно удобно, если функция принимает значение 1 на небольшом числе наборов, по сравнению с их общим количеством.

Упражнение. Обязательно ли при таком задании функции указывать число переменных?

Важный пример применения булевых функций дают арифметические действия над двоичными числами: поскольку возможные знаки в двоичной системе суть 0 и 1, то зависимости знаков результата от знаков слагаемых/сомножителей выражаются **булевыми функциями**. При сложении двух однозначных двоичных чисел A и B знак суммы в младшем разряде равен $(A \oplus B)$, а знак переноса σ возникает только если оба слагаемых равны 1, т.е. $\sigma = A \& B$. Умножение однозначных двоичных чисел тождественно конъюнкции, что фактически отмечено выше.

X	0	X	$\bar{X}$	1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Табл. 5.

X	Y	$X \& Y$	$X \vee Y$	$X \rightarrow Y$	$X \sim Y$	$X \oplus Y$	$X Y$
0	0	0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0

Табл. 6.

В табл.7 представлены 3 функции трех переменных. Первую из них – $m_3(X, Y, Z)$ называют иногда функцией большинства – ее значение равно значению, которое принимает большинство аргументов (т.е. два или три): если в наборе больше единиц, чем нулей, то и значение функции равно 1. Заметим, что при сложении двух многозначных двоичных чисел в каждом разряде, кроме самого младшего, складываются 3 однозначных числа: знаки двух слагаемых в этом разряде и знак переноса из предыдущего разряда. Таким образом, знак суммы как логическая функция есть сумма по модулю 2 трех булевых переменных. Знак переноса 1 возникает, если при таком сложении знаков число

единиц равно 2 или 3, т.е. он равняется значению функции большинства от тех же 3 переменных.

В той же таблице заданы две другие функции, обозначенные g_1 и g_2 . По форме – это функции трех переменных, однако нетрудно убедиться, что $g_1 = X \vee Z$, $g_2 = \bar{Y}$. Как видим, функция g_1 не зависит от аргумента Y , а функция g_2 от аргументов X, Z . Действительно, если, например, $X = 0, Z = 1$, то и при $Y = 0$ (набор 001), и при $Y = 1$ (набор 011) выполнено равенство $g_1 = 1$. Таким же образом проверяются остальные 3 сочетания переменных X и Z . Введем определение.

Несущественные (фиктивные) переменные: для функции $Z = f(X_1, X_2, \dots, X_{k-1}, X_k, X_{k+1}, \dots, X_n)$ переменная X_k называется несущественной, если выполнено $f(X_1, X_2, \dots, X_{k-1}, 0, X_{k+1}, \dots, X_n) = f(X_1, X_2, \dots, X_{k-1}, 1, X_{k+1}, \dots, X_n)$ при всех значениях $X_1, X_2, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_n$.

Таким образом, для функции g_1 несущественной переменной является Y , а для функции g_2 – несущественные переменные X и Z .

Если относиться к функциям n переменных и функции, существенно зависящие не от всех своих переменных (т.е. являющиеся по существу функциями меньшего числа переменных), то общее число функций n переменных равно числу

X	Y	Z	m_3	g_1	g_2
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0

Табл. 7.

булевых векторов длины 2^n , т.е. 2^{2^n} . Для одной переменной это число равно 4 (см. табл.5); для двух переменных – $2^4 = 16$; для трех переменных – $2^8 = 256$; для четырех переменных – $2^{16} = 65536$ и т.д. ^{число строк в Excel}

Множество всех логических функций, от любого конечного числа переменных обозначается P_2 .

Если X_1 – фиктивная переменная функции $Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$, то первая половина задающего ее столбца значений совпадает со второй, и если отбросить вторую половину таблицы этой функции и затем удалить 1-й столбец (состоящий из нулей), то останется таблица некоторой функции $(n-1)$ переменных $X_2, \dots, X_n$. Аналогично, если X_k – фиктивная переменная функции $Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ и вычеркнуть из таблицы столбец переменной X_k и все строки с единичным значением X_k (т.е. строки, в которых $X_k = 1$), то останется таблица функции $g(X_1, X_2, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_n)$. Будем говорить, что g получается из f **удалением**, а f из g – **введением** фиктивной переменной X_k .

Функции, которые могут быть получены друг из друга удалением и введением фиктивных переменных, считаются **равными**. Очевидно, равенство функций есть отношение эквивалентности на P_2 , поэтому множество всех булевых функций разбивается на классы равных функций. В этом смысле, использованные выше записи $g_1 = X \vee Z$, $g_2 = \bar{Y}$ – правильны, т.е. функция g_1 равна функции двух переменных $X \vee Z$, имеющей столбец значений $(0111)^T$, а функция g_2 равна функции одной переменной Y , имеющей столбец значений $(10)^T$.

Понятно, что удаление фиктивных переменных делает задание функции таблицей более компактным. Однако и введение фиктивных переменных может быть полезным: некоторую совокупность функций от разных множеств переменных можно рассматривать как зависящую от одного и того же множества переменных – объединения множеств переменных всех функций совокупности, если это объединение конечно.

§2. Логические формулы. Булева алгебра

Задание функций непосредственно таблицей удобно лишь при небольшом числе переменных. Другим средством представления функций является суперпозиция, символическим (аналитическим) выражением которой служат формулы. Применение формул связано с использованием функциональных знаков – символов булевых функций. Некоторые из них уже встречались. Применение формул позволяет представить функции большого числа переменных суперпозициями

функций меньшего числа переменных, прежде всего через функции 1 и 2 переменных.

Формулы алгебры логики (пропозициональные формулы)

– формулы, построенные из знаков переменных и знаков функциональных операций с соблюдением определенных правил построения формул.

Поскольку мы будем рассматривать формулы, использующие исключительно одноместные и двуместные операции, приведем соответствующее индуктивное определение:

1) булевы константы 0, 1 – формулы;

2) переменные X, Y, Z и т.д. – формулы;

3) если F и G – формулы, то $\neg F$ и $(F \circ G)$ – формулы, где $\neg$ – знак унарной операции (функции) отрицания, а $\circ$ – знак некоторой бинарной функциональной операции; F и G называются подформулами.

Согласно этому определению $(X \vee Y)$, $(X \rightarrow Z)$, $(Y \& Y)$ – формулы: переменные, связанные знаками функциональных операций $\&, \vee, \rightarrow$ $(X \rightarrow (\neg Y \vee Z))$, $((X | Y) \oplus (X \sim Z))$ – также формулы, поскольку $(X | Y)$, $(X \oplus Z)$, $(X \sim Z)$, $\neg Y$, $(\neg Y \vee Z)$ – формулы, и $\rightarrow, \oplus, \sim$ суть функциональные знаки. Однако для сокращения формул принято использовать следующую иерархию (частичный порядок) функциональных символов. Знак $\neg$ связывает теснее знака $\&$, знак $\&$ – теснее знаков $\vee, \rightarrow, \sim, \oplus$, а последние – теснее знака равенства $=$, связывающего равные формулы. Символически:

" $\neg$ " > "&" > (" $\vee$ ", " $\rightarrow$ ", " $\sim$ ", " $\oplus$ ") > "=".

Кроме того, знак конъюнкции можно опускать подобно знаку умножения в алгебре; знак отрицания $\neg X$, отнесенный к отдельной переменной удобнее записывать как надстрочное отрицание $\bar{X}$. Это соглашение, а также ассоциативность операций $\vee$ и $\&$ позволяют устранять излишние скобки, в том числе, внешние. Например, выражение

$$((\neg A \& (B \rightarrow C)) \vee (A \& (B \sim C))) =$$
$$= (((\neg A \& \neg B) \vee (\neg B \& \neg C)) \vee (B \& C))$$



может быть записано короче: $A(B \rightarrow C) \vee A(B \sim C) = \bar{A}\bar{B} \vee \bar{B}\bar{C} \vee BC$.

Формулам естественным образом соответствуют функции: знакам переменных – булевы переменные, а подформулам, соединенным функциональными знаками – булевы функции. При этом каждая формула

задает единственную функцию, но обратное не верно: для любой функции существует много различных представляющих ее формул. Например, приведенное выше равенство $\overline{X \& Y} = \overline{X} \vee \overline{Y}$, предлагает две разные записи одной и той же функции. Другие примеры встречались при определении функции $X | Y$. Мы приходим к следующему понятию.

Эквивалентные (равносильные) формулы – формулы, представляющие одну и ту же функцию.

Проверить равенство $F_1 = F_2$ двух булевых функций, представленных разными формулами, можно с помощью вычисления их значений на всех наборах значений переменных. Однако это трудоемкая процедура, и удобнее избрать другой путь: эквивалентные преобразования.

Прежде всего приведем равенства для формул, содержащих операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания (X, Y, Z – логические переменные).

- | | |
|---|---|
| 1. $X \vee Y = Y \vee X$ | 2. $X \& Y = Y \& X$ |
| 3. $(X \vee Y) \vee Z = X \vee (Y \vee Z)$ | 4. $(X \& Y) \& Z = X \& (Y \& Z)$ |
| 5. $(X \vee Y) \& Z = (X \& Z) \vee (Y \& Z)$ | |
| 6. $(X \& Y) \vee Z = (X \vee Z) \& (Y \vee Z)$ | |
| 7. $X \vee X = X$ | 8. $X \& X = X$ |
| 9. $X \vee (X \& Y) = X$ | 10. $X \& (X \vee Y) = X$ |
| 11. $\neg(X \vee Y) = \neg X \& \neg Y$ | 12. $\neg(X \& Y) = \neg X \vee \neg Y$ |
| 13. $X \vee \neg X = 1$ | 14. $X \& \neg X = 0$ |
| 15. $X \vee 0 = X$ | 16. $X \& 0 = 0$ |
| 17. $X \vee 1 = 1$ | 18. $X \& 1 = X$ |
| 19. $\neg 1 = 0$ | 20. $\neg 0 = 1$ |
| 21. $\neg(\neg X) = X$ | |

Конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание можно рассматривать как алгебраические операции над булевыми функциями. Свойства 1-2 выражают коммутативность, свойства 3-4 – ассоциативность операций $\vee$ и $\&$; свойства 5-6 – взаимную дистрибутивность этих операций, что дает возможность раскрывать скобки в формулах. Свойства 7-8 – устранение кратности; свойства 9-10 называют **правилами поглощения**; они являются следствиями остальных свойств, что показано ниже. Свойства 11-12 – законы де Моргана. Свойство 13

называют законом исключенного третьего; свойство 14 – законом противоречия. Свойства 15-20 характеризуют основные операции над переменной и константами 0 и 1. Свойство 21 – снятие двойного отрицания.

Совокупность всех булевых функций P_2 с тремя данными операциями есть алгебра $(P_2; \&, \vee, \neg)$. Она называется алгеброй булевых функций, алгеброй логики, а также **булевой алгеброй**. Сравнивая свойства 1-21 для булевых функций со свойствами 1-21 §1 главы 1 для алгебры множеств, приходим к следующему результату.

Соотношение между булевой алгеброй и алгеброй Кантора есть изоморфизм, порождаемый соответствием между подмножествами конечного n -элементного множества M и n -мерными булевыми векторами вместе с соответствием между операциями объединения, пересечения, дополнения для множеств и операциями дизъюнкции, конъюнкции и отрицания для векторов. При этом соответствии сохраняются все свойства операций, их определяющие.

Вследствие описанного изоморфизма всякую алгебру, которая обладает свойствами 1-21, называют булевой алгеброй. Кроме алгебры Кантора и алгебры логических функций, булевой алгеброй является, например, алгебра случайных событий в теории вероятностей.

Упражнение. Разберите самостоятельно, что соответствует в алгебре Кантора и в алгебре случайных событий булевым функциям $X \rightarrow Y$, $X \oplus Y$, константам 0 и 1.

Некоторые рассмотренные выше функции выражаются через $\&, \vee, \neg$, и эти выражения тоже представляют эквивалентности:

$$X \oplus Y = \bar{X} \cdot Y \vee X \cdot \bar{Y};$$

$$X \rightarrow Y = \bar{X} \vee Y;$$

$$X | Y = \bar{X} \vee \bar{Y};$$

$$X \sim Y = \bar{X} \cdot \bar{Y} \vee X \cdot Y.$$

Для функций $X \oplus Y, X \sim Y, X \rightarrow Y$ справедливы также соотношения:

$$X \oplus 0 = X; X \oplus 1 = \neg X; X \oplus \bar{X} = 0;$$

$$X \sim Y = (X \rightarrow Y) \& (Y \rightarrow X);$$

$$X \sim 1 = X; X \sim 0 = \neg X; X \sim X = 1;$$

$$X \rightarrow 1 = 1; X \rightarrow 0 = \neg X; 1 \rightarrow X = X; 0 \rightarrow X = 1; X \rightarrow X = 1.$$

Важнейшее свойство равенства булевых функций состоит в том,

что если в суперпозиции $f(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))$ заменить какую-либо функцию $g_i(x)$ на равную ей, то это не повлияет на результат. Указанная процедура представляет **правило замены подформул**.

С другой стороны, если в формуле $F_1 = F_2$, выражающей равенство (эквивалентность формул) двух булевых функций заменить какую-либо переменную X на произвольную формулу f , то полученные формулы F'_1 и F'_2 представляют уже две другие функции ($F'_1 \neq F_1, F'_2 \neq F_2$), но равенство между ними сохраняется: $F'_1 = F'_2$. Подчеркнем, что должны одновременно заменяться **все вхождения** переменной X . Так, из равенства (13) получается равенство $F \vee \neg F = 1$, верное для любой формулы F . Однако частичная замена $F \vee \neg X = 1$ уже не дает верного равенства.

Правильная подстановка и замена подформул приводит к новым эквивалентным соотношениям.

Несколько следствий основных равенств:

1) **поглощение**: а) свойство 9: $X \vee X \cdot Y = X$; (*)

Доказательство: $X \vee X \cdot Y =$ [в силу свойства 18] $= X \cdot 1 \vee X \cdot Y =$ [выносим X за скобки] $= X \cdot (1 \vee Y) =$ [в силу свойств 17, 18] $= X \cdot 1 = X$.

б) свойство 10: $X \cdot (X \vee Y) = X$;

Доказательство: $X \cdot (X \vee Y) =$ [раскрываем скобки] $= X \cdot X \vee X \cdot Y =$ [в силу свойств 8, 9] $= X \vee X \cdot Y = X$.

2) **склеивание**: а) $X \cdot Y \vee X \cdot \bar{Y} = X$;

Доказательство: $X \cdot Y \vee X \cdot \bar{Y} =$ [выносим X за скобки] $= X \cdot (Y \vee \bar{Y}) =$ [в силу свойств 13, 18] $= X \cdot 1 = X$;

б) $X \vee \bar{X} \cdot Y = X \vee Y$;

Доказательство: $X \vee \bar{X} \cdot Y =$ [заменяем X на левую часть равенства (*)] $= X \vee X \cdot Y \vee \bar{X} \cdot Y =$ [выносим Y за скобки из двух последних слагаемых] $= X \vee Y \cdot (X \vee \bar{X}) =$ [в силу свойства 13] $X \vee Y \cdot 1 = X \vee Y$.

Обратите внимание, что равенства 7-10, 13-18 и указанные следствия содержат в правой части меньше символов (более короткие

формулы), чем в левой. Поэтому применение этих эквивалентностей позволяет осуществлять преобразования, в частности, упрощения формул, выражать одни из функций через другие; некоторые примеры такого рода уже встречались.

Возникают естественные вопросы:

(1) можно ли суперпозициями функций одной-двух переменных выразить **любую** функцию большего числа переменных;

(2) как это сделать, если это возможно.

Ответ на эти вопросы – в следующем разделе.

§3. Дизъюнктивные нормальные формы

Важным примером эквивалентности является **разложение булевой функции по переменной** – представление функции

$Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ в виде

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \bar{X}_1 \vee f(0, X_2, \dots, X_n) \vee X_1 f(1, X_2, \dots, X_n).$$

Справедливость этого тождества следует из того, что оба слагаемых, связанных знаком дизъюнкции, не могут одновременно равняться 1,

так как один из сомножителей $\bar{X}$ или X равняется 0. При подстановке в левую часть равенства константы 0 на место X_1 второе слагаемое в правой части обращается в 0, а при подстановке константы 1 – первое.

Функции $(n-1)$ переменных $f(0, X_2, \dots, X_n)$ и $f(1, X_2, \dots, X_n)$ имеют в качестве столбцов значений соответственно верхнюю и нижнюю половины столбца значений $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Например, функция

$m_3(X, Y, Z)$, имеющая столбец значений $[00010111]^T$, при разложении по первой переменной может быть представлена:

$m_3(X, Y, Z) = \bar{X}[0001]^T \vee X[0111]^T$, и поскольку $[0001]^T$ – таблица для конъюнкции, а $[0111]^T$ – для дизъюнкции, то

$$m_3(X, Y, Z) = \bar{X} \cdot (Y \& Z) \vee X \cdot (Y \vee Z) = \bar{X}YZ \vee XY \vee XZ.$$

В каждом из слагаемых функции от переменных $X_2, \dots, X_n$ могут быть таким же образом разложены по переменному X_2 и т.д.

Примеры. 1) Для функции одной переменной $f(X)$ разложение имеет вид $f(X) = \bar{X} \cdot f(0) \vee X \cdot f(1)$. Обозначим $\alpha = f(0)$, $\beta = f(1)$.

Тогда $f(X) = \alpha \cdot X \vee \beta \cdot X$; α и β – константы, равные значениям функции f при $X = 0, 1$. В этих обозначениях таблица функции $f(X)$ есть $[\alpha, \beta]^T$.

2) Для функции 3 переменных $f(X, Y, Z)$ разложение по переменной X дает:

$$f(X, Y, Z) = \bar{X} \cdot f(0, Y, Z) \vee X \cdot f(1, Y, Z).$$

Далее, обозначая $f(0, Y, Z)$ через $g_0(Y, Z)$, а $f(1, Y, Z)$ – через $g_1(Y, Z)$, разложим их по переменной Y :

$$\begin{aligned} f(0, Y, Z) &= g_0(Y, Z) = \bar{Y} \cdot g_0(0, Z) \vee Y \cdot g_0(1, Z) = \\ &= \bar{Y} \cdot f(0, 0, Z) \vee Y \cdot f(0, 1, Z); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1, Y, Z) &= g_1(Y, Z) = \bar{Y} \cdot g_1(0, Z) \vee Y \cdot g_1(1, Z) = \\ &= \bar{Y} \cdot f(1, 0, Z) \vee Y \cdot f(1, 1, Z). \end{aligned}$$

Тем самым, получаем разложение исходной функции на 4 логических слагаемых: $f(X, Y, Z) = \bar{X} \cdot (Y \cdot g_0(0, Z) \vee Y \cdot g_0(1, Z)) \vee X \cdot (\bar{Y} \cdot g_1(0, Z) \vee Y \cdot g_1(1, Z)) =$ [раскрывая скобки] $= \bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot g_0(0, Z) \vee \bar{X} \cdot Y \cdot g_0(1, Z) \vee X \cdot \bar{Y} \cdot g_1(0, Z) \vee X \cdot Y \cdot g_1(1, Z).$

Далее, вводя новые обозначения, $h_{00} = g_0(0, Z)$; $h_{01} = g_0(1, Z)$; $h_{10} = g_1(0, Z)$; $h_{11} = g_1(1, Z)$, разложим эти 4 функции по их единственной переменной Z :

$$h_{00}(Z) = \bar{Z} \cdot h_{00}(0) \vee Z \cdot h_{00}(1) = \bar{Z} \cdot f(0, 0, 0) \vee Z \cdot f(0, 0, 1);$$

$$h_{01}(Z) = \bar{Z} \cdot h_{01}(0) \vee Z \cdot h_{01}(1) = \bar{Z} \cdot f(0, 1, 0) \vee Z \cdot f(0, 1, 1);$$

$$h_{10}(Z) = \bar{Z} \cdot h_{10}(0) \vee Z \cdot h_{10}(1) = \bar{Z} \cdot f(1, 0, 0) \vee Z \cdot f(1, 0, 1);$$

$$h_{11}(Z) = \bar{Z} \cdot h_{11}(0) \vee Z \cdot h_{11}(1) = \bar{Z} \cdot f(1, 1, 0) \vee Z \cdot f(1, 1, 1).$$

Окончательно подставляя эти выражения в предыдущую формулу и раскрывая скобки, получаем разложение $f(X, Y, Z)$ по всем трем переменным в виде дизъюнкции 8 логических слагаемых:

$$f(X, Y, Z) = \bar{X}\bar{Y}\bar{Z}f(0,0,0) \vee \bar{X}\bar{Y}Zf(0,0,1) \vee \bar{X}Y\bar{Z}f(0,1,0) \vee \bar{X}YZf(0,1,1) \vee \\ \vee X\bar{Y}\bar{Z}f(1,0,0) \vee X\bar{Y}Zf(1,0,1) \vee XY\bar{Z}f(1,1,0) \vee XYZf(1,1,1).$$

Каждое слагаемое представляет здесь конъюнкцию переменных и их отрицаний и некоторой константы, определяемой значением функции f на определенном наборе своих переменных, причем переменная входит в конъюнкцию с отрицанием только, если ее значение в этом наборе равно 0. В связи с этим введем понятие:

Элементарная конъюнкция – конъюнкция нескольких переменных и их отрицаний, в которую каждая переменная входит не более одного раза. Примеры элементарных конъюнкций: X , $\bar{X}Y$, $\bar{X}\bar{Y}$, $X\bar{Z}S\bar{T}$, YZT . Формулы $\bar{X}ZX$ и XZX не являются элементарными конъюнкциями: первая содержит одновременно переменную X и ее отрицание, во вторую переменная X входит дважды.

Для дальнейшего введем удобное обозначение: X^σ – форма записи функции $X \sim \sigma$, где X – переменная, а σ – двоичный параметр. Рассмотрим подробнее: если подставить константу вместо обеих переменных, получим равенства $0^1 = 0$, $0^0 = 1$, $1^1 = 1$, $1^0 = 0$; подстановка констант вместо X дает: $0^\sigma = \bar{\sigma}$, $1^\sigma = \sigma$; наконец, при подстановке констант вместо σ получаем $X^0 = \bar{X}$, $X^1 = X$.

Приведенные выше примеры элементарных конъюнкций можно в новых обозначениях записать так:

$$X = X^1; \bar{X}Y = X^0Y^1; \bar{X}\bar{Y} = X^0Y^0; X\bar{Z}S\bar{T} = X^1Z^0S^1T^0 \text{ и т.п.}$$

Элементарная конъюнкция, соответствующая набору $= (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ – конъюнкция $X_1^{\sigma_1} \& X_2^{\sigma_2} \& \dots \& X_n^{\sigma_n}$. Для n -мерного набора конъюнкция содержит ровно n множителей с отрицаниями или без них. Как функция n переменных она принимает значение 1 только на наборе $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$.

Используя введенные обозначения, можно записать предыдущее разложение функции $f(X, Y, Z)$ по-другому:

$$f(X, Y, Z) = \bigvee_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 = 0,1} X^{\sigma_1} Y^{\sigma_2} Z^{\sigma_3} f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

Теперь можно удалить из этой логической суммы те слагаемые, для

которых $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ (пользуясь свойствами 16 и 15). Логическую сумму оставшихся членов можно записать так:

$$f(X, Y, Z) = \bigvee_{\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 : f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 1\}} X^{\sigma_1} Y^{\sigma_2} Z^{\sigma_3}, \text{ или короче: } \bigvee_{f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 1} X^{\sigma_1} Y^{\sigma_2} Z^{\sigma_3}$$

Имеется в виду, что в логической сумме участвуют только те элементарные конъюнкции, которые соответствуют наборам констант $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, для которых $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 1$.

Подобное представление возможно для любой булевой функции, и мы приходим к важному понятию.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) – представление функции $Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ в виде дизъюнкции всех элементарных конъюнкций, соответствующих наборам значений $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, на которых $Z = 1$:

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \bigvee X_1^{\sigma_1} X_2^{\sigma_2} \dots X_n^{\sigma_n} \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1$$

СДНФ содержит ровно столько n -членных элементарных конъюнкций, сколько единиц в столбце значений функции $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$. На каждом из 2^n наборов либо все логические слагаемые СДНФ обращаются в 0 (если функция f на этом наборе равна 0), либо ровно одна конъюнкция обращается в 1 (если f равна 1). Не имеет СДНФ единственная функция – тождественно равная нулю (константа 0).

Отсюда – простой способ выражения любой функции (кроме константы 0), заданной таблично, в виде СДНФ. По таблице значений составляются соответствующие элементарные конъюнкции и связываются знаком дизъюнкции.

Примеры. 1) Выражения $X \oplus Y = \bar{X}Y \vee X\bar{Y}$, $X \sim Y = \bar{X}\bar{Y} \vee XY$, $X \rightarrow Y = \bar{X}\bar{Y} \vee \bar{X}Y \vee XY$, $X | Y = \bar{X}\bar{Y} \vee \bar{X}Y \vee X\bar{Y}$ суть СДНФ этих функций; а $X \rightarrow Y = \neg X \vee Y$, $X | Y = \bar{X} \vee \bar{Y}$ не СДНФ.

2) СДНФ для функции большинства $m_3(X, Y, Z)$ содержит 4 элементарные конъюнкции: $m_3(X, Y, Z) = \bar{X}YZ \vee X\bar{Y}Z \vee XY\bar{Z} \vee XYZ$.

3) СДНФ для функции 4 переменных $g(X,Y,Z,T)$ со столбцом значений $[0100100100011001]^T$ содержит 6 элементарных конъюнкций:

$$g(X,Y,Z,T) = \bar{X}\bar{Y}\bar{Z}T \vee \bar{X}Y\bar{Z}\bar{T} \vee \bar{X}YZ\bar{T} \vee X\bar{Y}ZT \vee XY\bar{Z}\bar{T} \vee XYZT.$$

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма является частным случаем более общего вида формул.

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) – дизъюнкция нескольких элементарных конъюнкций. Подчеркнем, что ДНФ – это не всякая формула, выражающая функцию через операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания: например, $X \cdot (\bar{Y} \vee Z)$ – не ДНФ; однако ее

можно привести к ДНФ, раскрывая скобки: $X \cdot \bar{Y} \vee X \cdot Z$.

Используя некоторые из эквивалентностей, прежде всего, 1-6, можно выносить за скобки общие множители, а применяя равенства 7-10, 13-18, а также приемы склеивания, упрощать формулы, поскольку, как уже отмечалось, в этих равенствах правые части короче левых.

Примеры. 1) Докажем тождество: $X \cdot (X \oplus 1) = 0$.

$X \cdot (X \oplus 1) =$ [раскрываем скобки] $= X \cdot X \oplus X =$ [устраняем кратность] $= X \oplus X = 0$.

2) Докажем тождество: $Y \rightarrow Z = \bar{\bar{Z}} \rightarrow \bar{Y}$.

Преобразуем обе части равенства, выражая импликацию через дизъюнкцию: $A \rightarrow B = \neg A \vee B$; получаем: $\bar{Y} \vee Z = \bar{\bar{\bar{Z}}} \vee \bar{Y} =$ [снимаем двойное отрицание] $= Z \vee \bar{Y}$. Равенство доказано, поскольку дизъюнкция – коммутативная операция.

3) Упростить формулу $f = \bar{X} \cdot Y \cdot \bar{Z} \vee X \cdot \bar{Z}$. Выносим за скобки общий множитель: $f = \bar{Z} \cdot (\bar{X} \cdot Y \vee X) = \bar{Z} \cdot (X \vee Y)$.

ГЛАВА 4. ФУНКЦИОНАЛЬНО ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

§1. Замкнутые классы булевых функций

Выше показано, что любая функция может быть выражена в виде ДНФ, т.е. формулой, использующей функциональные знаки $\&$, $\vee$, $\neg$ и символы переменных. Еще один интересный пример дает система функций

$$\{1, X \oplus Y, X \& Y\}. \quad (1)$$

Выше показано, что $\bar{X} = X \oplus 1$. Используя это равенство и закон де Моргана (свойство 11), выразим дизъюнкцию $X \vee Y$ через функции системы (1).

$$\begin{aligned} X \vee Y &= \overline{\bar{X} \& \bar{Y}} = (X \oplus 1) \cdot (Y \oplus 1) \oplus 1 = XY \oplus X \oplus Y \oplus 1 \oplus 1 = \\ &= XY \oplus X \oplus Y. \end{aligned}$$

Поэтому в любой ДНФ можно выразить дизъюнкцию и отрицание через функции системы (1).

Примеры:

$$\begin{aligned} 1) \quad \bar{X} \vee YZ &= [\text{заменяем знак отрицания}] = (X \oplus 1) \vee YZ = \\ [\text{заменяем знак дизъюнкции}] &= (X \oplus 1) \cdot YZ \oplus (X \oplus 1) \oplus YZ = \\ [\text{раскрываем скобки}] &= XYZ \oplus YZ \oplus X \oplus 1 \oplus YZ = XYZ \oplus X \oplus 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad XY \vee XZ &= [\text{заменяем знак дизъюнкции}] = \\ &= XY \cdot XZ \oplus XY \oplus XZ = [\text{используем поглощение } X \cdot X = X] \\ &= XYZ \oplus XY \oplus XZ. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad XY \vee \bar{X}Z &= XY \cdot (X \oplus 1) \cdot Z \oplus XY \oplus (X \oplus 1) \cdot Z = \\ &= XYZ \oplus XYZ \oplus XY \oplus XZ \oplus Z = XY \oplus XZ \oplus Z. \end{aligned}$$

То же преобразование можно выполнить проще, заменяя сначала знак дизъюнкции:

$$\begin{aligned} XY \vee \bar{X}Z &= XY \cdot \bar{X}Z \oplus XY \oplus \bar{X}Z. \text{ Первое слагаемое равно 0, так как} \\ &\text{содержит произведение } X \cdot \bar{X}, \text{ и его можно из формулы удалить.} \\ &\text{Оставшуюся часть преобразуем, заменяя знак отрицания:} \\ XY \oplus \bar{X}Z &= XY \oplus (X \oplus 1) \cdot Z = [\text{раскрываем скобки}] = XY \oplus XZ \oplus Z. \end{aligned}$$

Как видно из рассмотренных примеров, если в формуле после произведенных замен раскрыть скобки и выполнить умножения и

сложения, а также поглощение по правилам эквивалентных преобразований, то получится формула, представляющая сумму по модулю 2 некоторых конъюнкций переменных (в каждой конъюнкции переменные не повторяются, но, в отличие от элементарных конъюнкций – без отрицаний) и, быть может, константы 1.

Полученная формула, порожденная логическими константами 0 и 1 и функциями $X \oplus Y$ и $X \& Y$ называется **многочленом Жегалкина**. Можно показать, что различные (с точностью до перестановки слагаемых в сумме и сомножителей в конъюнкциях) многочлены представляют различные функции, т.е. имеет место единственность представления булевой функции многочленом Жегалкина.

В самом деле, пусть два многочлена $P(X_1, X_2, \dots, X_n)$ и $Q(X_1, X_2, \dots, X_n)$ равны как функции, т.е. на одинаковых наборах принимают одинаковые значения. Тогда для какого-нибудь существенного переменного (пусть это X_1), вынеся X_1 за скобки из всех содержащих его членов, P и Q можно представить в виде

$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = X_1 \& R_1(X_2, \dots, X_n) \oplus S_1(X_2, \dots, X_n) \quad (*)$$

$$Q(X_1, X_2, \dots, X_n) = X_1 \& R_2(X_2, \dots, X_n) \oplus S_2(X_2, \dots, X_n) \quad (**)$$

где R_i, S_i – многочлены, зависящие от переменных $(X_2, \dots, X_n)$.

Достаточно показать, что $R_1 = R_2, S_1 = S_2$ как многочлены. Легко проверить, что для $n=1$ утверждение о единственности многочлена верно: все функции одной переменной – в табл.5. Тем самым выполнено базовое условие для применения метода математической индукции по числу переменных n . Выполним индукционный шаг: предположим, что утверждение справедливо для функций $(n-1)$ переменных и докажем его для n . Поскольку P и Q тождественно равны, то при $X_1 = 0$ они также равны. Но при этом $P = S_1(X_2, \dots, X_n)$, а $Q = S_2(X_2, \dots, X_n)$. Значит, S_1 и S_2 совпадают как многочлены, по предположению индукции, и, прибавив S_1 к обеим частям (*) и, соответственно, S_2 к (**), получим

$$P \oplus S_1 = X_1 \& R_1; Q \oplus S_2 = X_1 \& R_2.$$

Левые части этих равенств равны, следовательно, равны и правые,

в том числе, при $X=1$, откуда R_1 и R_2 равны как функции. Тогда, по предположению индукции, они совпадают и как многочлены, что завершает доказательство.

Возникает вопрос: как определить для системы функций, можно ли с ее помощью выразить любую логическую функцию. В связи с этим рассмотрим несколько понятий.

Замыкание системы булевых функций D – класс всех суперпозиций функций системы D .

Примеры: 1) Если система D – множество из двух функций: конъюнкции и дизъюнкции, то ее замыкание – всевозможные ДНФ такие, что входящие в них элементарные конъюнкции не содержат отрицаний переменных (например, $XZT \vee YS \vee YSTW \vee XYT$). Любую другую суперпозицию конъюнкции и дизъюнкции можно привести к такому виду: во всякой формуле, представляющей собой конъюнкцию дизъюнкций можно раскрыть скобки и преобразовать ее в дизъюнкцию конъюнкций. Так,

$$X \vee (XZ \vee Y)(XT \vee XYZ) = X \vee XXZT \vee XYT \vee XXYZ \vee XYZ =$$

$$[\text{используем поглощение } X \cdot X = X] = X \vee XZT \vee XYT \vee XYZ.$$

2) Если система D состоит из одной функции $X \oplus Y$, то ее замыкание – всевозможные суммы различных переменных.

Замкнутый класс булевых функций – множество функций K , любая суперпозиция которых принадлежит K , т.е. замкнутый класс представляет собой множество булевых функций, замкнутое относительно операции суперпозиции.

Примеры. 1) Замыкание любой системы функций – замкнутый класс.

2) 4 функции одной переменной – замкнутый класс.

3) 2 функции X и $\neg X$ образуют замкнутый класс.

4) Множество сумм по модулю 2 нечетного числа переменных является замкнутым классом, поскольку подстановка в такую функцию вместо переменной функции этого класса увеличивает число вхождений переменных в формулу на четное число; при этом некоторые слагаемые могут взаимно сократиться ввиду эквивалентности $X \oplus X = 0$, и число переменных остается нечетным, поскольку при сокращениях в формуле переменные устраниваются парами.

Упражнение. Показать, что указанные в последнем примере функции образуют замыкание системы, состоящей из одной функции трех переменных $f = X \oplus Y \oplus Z$.

Упражнение. Проверить, является ли замкнутым класс,

аргументов все они имеют значение 0, и для внешней функции f набор ее переменных будет также нулевым, откуда $Z = 0$.

2) **Класс T_1** – класс функций, сохраняющих 1, т.е. функций, для которых $f(1,1,...,1) = 1$. Замкнутость T_1 устанавливается аналогично предыдущему.

Примерами функций, принадлежащих классам T_0 и T_1 , служат функции $X \& Y$ и $X \vee Y$; отрицание $\neg X$ не принадлежит ни T_0 ни T_1 ; функция $X \oplus Y$ принадлежит T_0 , но не принадлежит T_1 ; импликация $X \rightarrow Y$ напротив, не принадлежит T_0 , но принадлежит T_1 .

3) Для определения следующего класса введем понятие двойственности. **Двойственная функция** для функции $Z = f(X_1, X_2, ..., X_n)$ – функция $Z^* = \bar{f}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, ..., \bar{X}_n)$. Если на наборе $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ функция f принимает значение α , то двойственная ей функция f^* на противоположном наборе $\bar{\tilde{\sigma}} = (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, ..., \bar{\sigma}_n)$ принимает противоположное значение $\bar{\alpha}$.

Упражнение. Проверьте, например, что двойственной функцией к конъюнкции $X \& Y$ является дизъюнкция $X \vee Y$, константа 1 двойственна константе 0.

Для булевых функций справедлив **принцип двойственности** – если в формуле F , представляющей функцию f , все знаки функций заменить соответственно на знаки двойственных функций, то полученная формула F^* будет представлять функцию f^* , двойственную f .

Класс S самодвойственных функций – то есть функций таких, что $f(X_1, X_2, ..., X_n) = f^*(X_1, X_2, ..., X_n)$. Из определения следует, что двоичный набор значений самодвойственной функции антисимметричен относительно своей середины. Таким способом удобно проверять по таблице самодвойственность функции. Например, можно убедиться, что одноместные функции X и $\neg X$ – самодвойственные, а среди функций двух переменных самодвойственными являются только функции с одной несущественной переменной. Функция большинства $m_3(X, Y, Z)$ (см. §1 гл.3) является самодвойственной.

Из определения нетрудно вывести, что класс самодвойственных функций – замкнутый, поскольку в любой суперпозиции на противоположных наборах внутренние подформулы принимают противоположные значения, и, тем самым, наборы значений аргументов внешней функции также противоположны. Пусть $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m), \dots, \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_m) \in S$ и $F(t_1, t_2, \dots, t_m) = f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m), \dots, \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_m))$ – суперпозиция этих самодвойственных функций.

Тогда $\bar{F}(t_1, t_2, \dots, t_m) = \bar{f}(\varphi_1(t_1, \dots, t_m), \dots, \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_m)) = [\text{поскольку } f \in S] = f(\bar{\varphi}_1(t_1, \dots, t_m), \dots, \bar{\varphi}_n(t_1, t_2, \dots, t_m)) = [\text{поскольку } \varphi_1(t_1, \dots, t_m), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_m) \in S] = f(\varphi_1(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_m), \dots, \varphi_n(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_m)) = F(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_m).$

4) В начале §1 гл.4 мы убедились в возможности представления любой функции многочленом Жегалкина.

Подмножеством множества многочленов является **класс L линейных функций** – функции вида $X_{i_1} \oplus X_{i_2} \oplus \dots \oplus X_{i_n} \oplus \sigma$. Здесь

$X_{i_1}, X_{i_2}, X_{i_n}$ – переменные, σ – булева константа (0 или 1).

Очевидно, что класс линейных функций – замкнутый: подстановка сумм вместо переменных представляет собой сумму; при этом некоторые пары слагаемых могут взаимно сократиться ввиду эквивалентности $X \oplus X = 0$.

Пример: Пусть $f(X, Y, Z) = X \oplus Y \oplus Z \oplus 1$, $\varphi_1 = X \oplus Y \oplus S \oplus T$, $\varphi_2 = S \oplus Z \oplus 1$. Тогда суперпозиция $F(X, Y, Z, S, T) = f(\varphi_1, \varphi_2, Z)$ [в функцию f подставляем функцию φ_1 вместо X и функцию φ_2 вместо Y] представляет собой линейную функцию:

$$F(X, Y, Z, S, T) = (X \oplus Y \oplus S \oplus T) \oplus (S \oplus Z \oplus 1) \oplus Z \oplus 1 = X \oplus Y \oplus T.$$

5) Введем отношение частичного порядка для булевых векторов: $X \leq Y$ (где $X = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $Y = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$) – если $\alpha_i \leq \beta_i$ для $i = 1, 2, \dots, n$. Заметим, что для булевых переменных строгое неравенство $\alpha < \beta$ означает, что $\alpha = 0, \beta = 1$, поскольку других возможностей нет. Равенство $\alpha = \beta$ добавляет варианты $\alpha = \beta = 0$ и $\alpha = \beta = 1$. Поэтому

неравенству $\alpha \leq \beta$ удовлетворяют 3 пары (α, β) : $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ и не удовлетворяет только пара $(1, 0)$. Можно заметить, что $(\alpha \leq \beta)$ эквивалентно $(\alpha \rightarrow \beta)$.

Класс M монотонных функций – это класс функций таких, что если $X \leq Y$, то $f(X) \leq f(Y)$, т.е. функция на большем наборе принимает не меньшее значение.

Среди заданных в табл.6 функций двух существенных переменных монотонными являются конъюнкция и дизъюнкция.

Покажем, что класс монотонных функций – замкнутый. Пусть функции $f(X_1, X_2, \dots, X_n), \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m), \dots, \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_m) \in M$ и $F(t_1, t_2, \dots, t_m) = f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m), \dots, \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_m))$ – суперпозиция этих монотонных функций. Пусть также $\alpha \leq \beta$ ($\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$).

Тогда $\varphi_i(\alpha) \leq \varphi_i(\beta)$ для $i=1, 2, \dots, m$, так как $\varphi_i \in M$. Поэтому $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = f(\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \dots, \varphi_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)) \leq [\text{поскольку } f \in M] \leq f(\varphi_1(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m), \dots, \varphi_n(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)) = F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ что и требовалось доказать.

Отметим, что для каждой упорядоченной пары (A, B) различных классов из пяти рассмотренных предполных T_0, T_1, S, L, M существует функция, входящая в A и не входящая в B . Таблица 8 содержит такие примеры: каждая функция таблицы входит в класс, соответствующий строке и не входит в класс, соответствующий столбцу. Например, входит в M , но не входит в S функция-константа 0; входит в S , но не входит в L функция $m_3(X, Y, Z)$. Из этого замечания можно сделать важный вывод: никакой из пяти классов T_0, T_1, S, L, M не входит целиком ни в какой из остальных четырех.

	$A:$	T_0	T_1	S	L	M
$B:$	T_0	*	0	0	$X \& Y$	$X \oplus Y$
	T_1	1	*	1	$X \& Y$	$X \sim Y$
	S	$\neg X$	$\neg X$	*	$m_3(X, Y, Z)$	$\neg X$
	L	$\neg X$	$\neg X$	$X \oplus Y$	*	$X \oplus Y$
	M	1	0	0	$X \& Y$	*

Табл. 8

§3. Критерий полноты системы булевых функций

Рассмотренные 5 классов функций используются при решении вопроса о функциональной полноте.

Критерий полноты системы булевых функций (теорема Поста) – система Σ полна в том и только в том случае, если для каждого из классов T_0, T_1, S, L, M в системе существует функция, не принадлежащая этому классу; иначе говоря, система Σ полна, если выполнены 5 условий:

- 1) в системе Σ есть $f_1 \notin T_0$,
- 2) в системе Σ есть $f_2 \notin T_1$,
- 3) в системе Σ есть $f_3 \notin S$,
- 4) в системе Σ есть $f_4 \notin L$,
- 5) в системе Σ есть $f_5 \notin M$.

Функции $f_1 - f_5$ – не обязательно различные.

Предварительно рассмотрим 3 утверждения, которые демонстрируют, как суперпозициями функций системы, удовлетворяющей условию теоремы Поста, выразить функции известных полных систем.

Лемма 1. Суперпозициями несамоудовлетворяющей функции $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ и функции $\neg X$ можно получить функцию-константу.

Если $f \notin S$, то существует набор $\tilde{\sigma}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ такой, что

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = f(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_n). \quad (*)$$

Построим суперпозицию $\varphi(X) = f(X^{\sigma_1}, X^{\sigma_2}, \dots, X^{\sigma_n})$, где вместо каждого переменного функции f подставляется либо X , либо $\neg X$.

Тогда $\varphi(0) = f(0^{\sigma_1}, 0^{\sigma_2}, \dots, 0^{\sigma_n}) = [\text{поскольку } 0^\sigma = \bar{\sigma}] = f(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_n) = [\text{ввиду } (*)] = f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = [\text{поскольку } 1^\sigma = \sigma] = f(1^{\sigma_1}, 1^{\sigma_2}, \dots, 1^{\sigma_n}) = \varphi(1)$. Таким образом $\varphi(0) = \varphi(1)$, а это означает, что $\varphi(X)$ – константа.

Следствие. Из функции $\neg X$ и константы можно получить другую константу.

Лемма 2. Суперпозициями немонотонной функции

$f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ и функций-констант 0 и 1 можно получить функцию $\neg X$.

Если $f \notin M$, то существуют наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ такие, что $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$, (т.е. $\alpha_i \leq \beta_i$ для $i=1, 2, \dots, n$) и $f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta})$, т.е. $f(\tilde{\alpha}) = 1, f(\tilde{\beta}) = 0$. Пусть $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ – набор, где каждое γ_i – либо переменная X , либо константа и определяется следующим образом:

$$\gamma_i = \begin{cases} \alpha_i, & \text{если } \alpha_i = \beta_i, \\ X, & \text{если } \alpha_i < \beta_i, \text{ т.е. если } \alpha_i = 0, \beta_i = 1. \end{cases}$$

Отметим, что если $X = 0$, то $\tilde{\gamma} = \tilde{\alpha}$; если $X = 1$, то $\tilde{\gamma} = \tilde{\beta}$. Пусть $\psi(X) = f(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$. Тогда $\psi(0) = f(\tilde{\alpha}) = 1$; $\psi(1) = f(\tilde{\beta}) = 0$, т.е. $\psi(X) \equiv \neg X$.

Лемма 3. Суперпозициями нелинейной функции $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$, функции $\neg X$ и функций-констант 0 и 1 можно получить конъюнкцию $X \& Y$.

Построим для функции f многочлен Жегалкина. В силу нелинейности f среди слагаемых найдется содержащее не менее 2 множителей. Пусть это переменные X_1 и X_2 . Тогда все слагаемые разбиваются на 4 группы: содержащие обе переменные X_1 и X_2 , только одну из них X_1 или X_2 и не содержащие ни одной. Объединяя слагаемые и вынося за скобки соответствующие множители в каждой из трех первых групп, получим:

$$f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = X_1 \cdot X_2 g_1(X_3, \dots, X_n) \oplus X_1 \cdot g_2(X_3, \dots, X_n) \oplus X_2 g_3(X_3, \dots, X_n) \oplus g_4(X_3, \dots, X_n).$$

Функции $g_1 - g_4$ зависят от переменных $X_3, \dots, X_n$, причем g_1 не равна тождественно 0, – иначе не было бы ни одного слагаемого с произведением $X_1 \cdot X_2$. Подставим в функцию f вместо переменных

$X_3, \dots, X_n$ тот набор констант $\sigma_3, \dots, \sigma_n$, для которого $g_1(X_3, \dots, X_n) = 1$; при этом функции g_2, g_3, g_4 обращаются в некоторые константы; обозначим их соответственно α, β, γ . Получим функцию двух переменных

$$\varphi(X_1, X_2) = f(X_1, X_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n) = X_1 \cdot X_2 \oplus \alpha X_1 \oplus \beta X_2 \oplus \gamma.$$

Теперь произведем еще одну подстановку: в функцию $\varphi(X_1, X_2)$ подставим функцию $(X_1 \oplus \beta)$ вместо X_1 и $(X_2 \oplus \alpha)$ вместо X_2 . В зависимости от значений α и β каждая из этих функций представляет собой либо X_i , либо $\bar{X}_i$, так что фактически мы подставляем либо переменную, либо ее отрицание. Получаем функцию $\psi(X_1, X_2)$, равную $(X_1 \oplus \beta)(X_2 \oplus \alpha) \oplus \alpha(X_1 \oplus \beta) \oplus \beta(X_2 \oplus \alpha) \oplus \gamma =$ [после раскрытия скобок] $= X_1 \cdot X_2 \oplus \beta X_2 \oplus \alpha X_1 \oplus \alpha\beta \oplus \alpha X_1 \oplus \alpha\beta \oplus \beta X_2 \oplus \alpha\beta \oplus \gamma =$ [после сокращений] $= X_1 \cdot X_2 \oplus \alpha\beta \oplus \gamma$, т.е. сумму по модулю 2 конъюнкции и константы $(\alpha\beta \oplus \gamma)$. Если последняя равна 0, то построение закончено; в противном случае, т.е. если $\psi(X_1, X_2) = X_1 \cdot X_2 \oplus 1$, то нужно подставить $\psi(X_1, X_2)$ в функцию $\neg X$: $\neg(X_1 \cdot X_2 \oplus 1) = X_1 \cdot X_2$.

Теперь доказательство теоремы Поста уже достаточно просто. Необходимость следует из сделанного выше замечания: если все функции системы принадлежат какому-нибудь из 5 классов (обозначим его Q), то в силу замкнутости класса Q все суперпозиции функций системы также принадлежат ему; в то же время в P_2 есть функции, которые не принадлежат Q , что означает неполноту системы.

Достаточность выводится из лемм 1-3. Пусть в системе есть функции $f_1 \notin T_0$, $f_2 \notin T_1$, $f_3 \notin S$, $f_4 \notin L$, $f_5 \notin M$ (некоторые из них могут совпадать). Суперпозиция $h_1(X) = f_1(X, X, \dots, X)$ – функция одной переменной, имеющая столбец значений $(1, \alpha)^T$; аналогично,

$h_2(X) = f_2(X, X, \dots, X)$ – функция со столбцом значений $(\beta, 0)^T$. Возможны два случая.

(1) $\alpha = 0$ или $\beta = 1$. Тогда $h_1(X)$ или $h_2(X)$ – функция $\neg X$. По лемме 1, из функций $f_3 \notin S$ и $\neg X$ можно получить константы 0 и 1.

(2) в противном случае $\alpha = 1$ и $\beta = 0$. Тогда $h_1(X) \equiv 1$, $h_2(X) \equiv 0$. По лемме 2, из функций $f_5 \notin M$ и констант можно получить функцию $\neg X$.

Как видим, в обоих случаях из функций системы могут быть построены обе константы и отрицание.

По лемме 3, из функций $f_4 \notin L$, отрицания $\neg X$ и констант 0 и 1 можно получить конъюнкцию $X \& Y$. В свою очередь, конъюнкция и отрицание образуют полную систему, чем и завершается доказательство теоремы Поста.

Для проверки конкретной системы на полноту можно заполнить для функций системы так называемую таблицу Поста: см. табл.9, в которой исследуется система $\{X \oplus Y, X \vee Y, 1\}$ (“+” означает принадлежность функции данному предполному классу).

	T_0	T_1	S	L	M
$X \oplus Y$	+	–	–	+	–
$X \vee Y$	+	+	–	–	+
1	–	+	–	+	+

Табл. 9.

	T_0	T_1	L
$X \oplus Y$	+	–	+
$X \& Y$	+	+	–
1	–	+	+

Табл. 10.

Принадлежность трех данных функций классам T_0 и T_1 проверяется по их таблицам очень просто. Также несложно проверить принадлежность их классу M (заметим, что если $f \notin T_1$ и не равна 0 тождественно, то она не монотонна). Очевидно также, что $(X \oplus Y) \in L$, свойство $(X \oplus Y) \notin S$ следует из соотношения

$$(X \oplus Y)^* = \overline{\overline{X \oplus Y}} = (X \oplus 1) \oplus (Y \oplus 1) \oplus 1 = X \oplus Y \oplus 1 \neq X \oplus Y.$$

Функция $(X \vee Y)$ не самодвойственна, поскольку двойственная ей, как мы знаем, другая функция – конъюнкция. Далее, $(X \vee Y)$

нелинейна, так как ее многочлен Жегалкина $XY \oplus X \oplus Y$ содержит произведение $X \cdot Y$. Легко проверяется также заполнение последней строки табл.9 – для функции-константы 1. Наконец, согласно теореме Поста, для полноты системы в каждом столбце таблицы Поста должен быть хотя бы один минус.

В таблице 11 для каждого из пяти рассмотренных выше классов T_0, T_1, S, L, M знаками “+” и “–” показана принадлежность ему ряда известных функций: всех 4 функций одной переменной, 6 функций двух переменных и 2 функций трех переменных. В отличие от предыдущей таблицы функций здесь представлены столбцами. Заметим, что в каждой строке таблицы имеется знак “–”; другими словами, для каждого из пяти классов есть не принадлежащая ему функция и, следовательно, ни один из них не совпадает с множеством всех логических функций P_2 , а каждый является частью P_2 .

	0	1	X	$\neg X$	$X \& Y$	$X \vee Y$	$X \rightarrow Y$	$X \sim Y$	$X \oplus Y$	$X Y$	$X \oplus Y \oplus Z$	$m_3(X, Y, Z)$
T_0	+	–	+	–	+	+	–	–	+	–	+	+
T_1	–	+	+	–	+	+	+	+	–	–	+	+
S	–	–	+	+	–	–	–	–	–	–	+	+
L	+	+	+	+	–	–	–	+	+	–	+	–
M	+	+	+	–	+	+	–	–	–	–	–	+

Табл. 11.

Несколько примеров полных систем рассмотрены нами в §1. Отметим интересный факт: из табл.11 можно заключить, что система, состоящая из одной функции – штриха Шеффера $X | Y$ – полна.

Упражнение. Проверьте, что $0 | 0 = 1, 1 | 1 = 0, 0 | 1 = 1 | 0 = 1$.

Убедитесь теперь, что $X | X = \neg X, (X | Y) | (X | Y) = X \& Y$.

Упражнение. С помощью табл.11 установите, какие из нижеследующих систем является функционально полными:

- $\{X \vee Y, X \rightarrow Y\}$
- $\{X \oplus Y, X \rightarrow Y\}$
- $\{\neg X, m_3(X, Y, Z)\}$
- $\{1, m_3(X, Y, Z)\}$
- $\{1, \neg X, X \oplus Y \oplus Z\}$

- е) $\{X \& Y, X \sim Y, X \oplus Y\}$
- ж) $\{0, X \vee Y, X \sim Y\}$
- з) $\{0, 1, m_3(X, Y, Z)\}$
- и) $\{X \sim Y, X \rightarrow Y\}$
- к) $\{X \vee Y, X \sim Y, X \oplus Y \oplus Z\}$
- л) $\{X \& Y, X \oplus Y, m_3(X, Y, Z)\}$

Система функций G называется **независимой**, если никакая функция f этой системы не выражается через остальные, т.е. f не принадлежит замыканию системы $G \setminus \{f\}$. Независимая система функций G называется **базисом замкнутого класса** K , если всякая функция $F \in K$ есть суперпозиция функций из G . Можно определить понятие базиса и так: **базис замкнутого класса** K – система функций, замыкание которой равно K , причем любое подмножество K (кроме самого K) уже не обладает этим свойством.

Примеры: 1) Система $\{\neg, \&\}$ – независимая.

Упражнение. Убедиться в этом, используя соотношения $\neg \in L$, $\& \notin L$, $\neg \notin T_1$, $\& \in T_1$ и замкнутость классов L и T .

2) Система $\{\neg, \vee, \&\}$ не является независимой, поскольку, как мы знаем, $\vee$ можно выразить через $\&$ и $\neg$ или, наоборот, $\&$ – через $\vee$ и $\neg$.

3) Система $\{\&, \oplus, 1\}$ – независима, в чем можно убедиться, построив для нее фрагмент таблицы Поста (табл.10). Действительно, для каждой из трех функций в этой таблице имеется класс, которому она не принадлежит, но принадлежат две остальные и, следовательно, все их суперпозиции.

В примерах 1-3 представлены полные системы функций. Теперь рассмотрим пример независимой системы для замкнутого класса, не совпадающего с P_2 .

Система $\{0, \sim\}$ не полная, так как обе функции линейны, и представляет базис класса L . Действительно, $\neg X = X \sim 0$, $\neg 0 = 1$,

$X \oplus Y = \neg(X \sim Y) = (X \sim Y) \sim 0$, а каждая линейная функция выражается через $(X \oplus Y)$ и $\neg X$. Независимость функций системы также легко проверить ($0 \notin T_0$, $0 \notin T_1$, $\sim \in T_0$, $\sim \in T_1$).

Некоторые следствия теоремы Поста.

Следствие 1. Всякий замкнутый класс $Q \neq P_2$ содержится целиком хотя бы в одном из 5 предполных классов T_0, T_1, S, L, M : иначе он представлял бы полную систему и, в силу замкнутости, равнялся бы P_2 .

Следствие 2 объясняет название **предполных** классов: если к какому-нибудь из них, допустим S , (для других классов рассмотрение аналогичное) добавить любую не принадлежащую ему функцию h , то замыкание системы $S \cup \{h\}$ совпадает с P_2 . Действительно, система $S \cup \{h\}$ шире, чем S и, в то же время, не может входить в какой-либо из остальных 4 классов, так как тогда в нем содержался бы целиком класс S , что противоречит замечанию в конце предыдущего параграфа.

Иначе говоря, между предполным классом и P_2 не может существовать промежуточный замкнутый класс. Отсюда

Следствие 3. В P_2 существуют лишь 5 предполных классов, т.е. обладающих свойством, сформулированным в следствии 2. Это рассмотренные нами T_0, T_1, S, L, M .

Следствие 4. Из лемм 1-3 и доказательства теоремы можно заключить, что если в системе функций присутствуют константы 0 и 1, то для ее полноты достаточно, чтобы в ней содержались немонотонная функция и нелинейная функция.

§4. Схемы правильных рассуждений

Формула, содержащая булевы переменные, называется **тождественно истинной**, или **тавтологией**, если она выражает булеву функцию, тождественно равную 1.

Формула называется **тождественно ложной**, если это формула функции, тождественно равной 0.

Формула называется **выполнимой**, если она не тождественно-ложная, и **опровержимой**, если она не тождественно-истинная.

Содержательность этих понятий связана с их применением в логике и ее приложениях. С точки зрения логики тавтология – это логический

закон, справедливый при любой подстановке конкретных высказываний вместо переменных.

Перечислим некоторые важные тавтологии (A, B, C - произвольные формулы).

(1) $A \vee \neg A$ – закон исключенного третьего, или *tertium non datur*

(2) $A \rightarrow A$

(3) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

(4) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ – цепное рассуждение

(5) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

(6) $A \& B \rightarrow A, A \& B \rightarrow B$

(7) $A \rightarrow (B \rightarrow A \& B)$

(8) $A \rightarrow (A \vee B), B \rightarrow (A \vee B)$

(9) $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$

(10) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ – закон Пирса.

Конечно, каждую из этих тавтологий можно обосновать, составив таблицы соответствующих функций одной, двух и трех переменных A, B, C и убедившись, что во всех таблицах в каждой строке значения равны 1.

В математических доказательствах используют рассуждения, которые принято считать **правильными**, если из совокупности (можно сказать точнее – из конъюнкции) истинных посылок следует истинность заключения. Кстати, это обстоятельство объясняет, почему в большинстве приведенных выше формул участвует операция импликации.

Пусть $P_1, \dots, P_n$ – посылки, Q – заключение. Для правильности схемы рассуждения: “из посылок $P_1, \dots, P_n$ следует Q ” нужно установить, что $(P_1 \& \dots \& P_n) \rightarrow Q$ – тавтология. Речь здесь идет лишь о правильности рассуждения, – сами P_i и Q могут быть истинными или ложными. Однако заметим, что если хотя бы одно из P_i ложно, то конъюнкция $P = (P_1 \& \dots \& P_n)$ ложна, а импликация $P \rightarrow Q$ истинна независимо от значений остальных составляющих ($I \rightarrow X = I$, или на языке булевых функций, $0 \rightarrow X = 1$ при любом значении X). Если же все P_i истинны,

то формула $P \rightarrow Q$ истинна только, если $Q = 1$.

Рассмотрим 2 примера.

1. "(Если число 5 простое, то оно нечетное). (Число 5 нечетное). Следовательно, (число 5 простое)".

Заключение – истинное высказывание, но схема рассуждения неправильная; ее можно выразить так: $((A \rightarrow B) \& B) \rightarrow A$. Легко проверить, что эта формула не является тождественно-истинной. Если $A = 0, B = 1$, то $A \rightarrow B = 1, 1 \& B = 1, 1 \rightarrow 0 = 0$.

2. "(Если стрелок в тире выбьет больше 92 очков, он получит приз). (Стрелок выбил 94 очка). Следовательно (он получит приз)". Рассуждение правильное, т.к. схема $((A \rightarrow B) \& A) \rightarrow B$ – тавтология. Проверьте это по таблице из 4 строк. Такая схема рассуждения называется **силлогизмом modus ponens**.

Распространенной схемой рассуждения является также следующая: $((A \rightarrow B) \& \bar{B}) \rightarrow \bar{A}$ (если из A следует B , но B не выполняется, то не выполняется и A). Такая схема называется **силлогизмом modus tollens**.

Часто встречается условный вид доказательства утверждения $A \rightarrow B$. Схему $(A \rightarrow C) \& (C \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ называют гипотетическим силлогизмом. В доказательствах могут применяться и косвенные методы, доказательства эквивалентных утверждений. Примеры:

$$1) A \rightarrow B \equiv \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (C \& \neg C) \equiv (A \& \neg B) \rightarrow (C \& \neg C)$$

Это способ доказательства от противного: предполагая, что из A не следует B , получаем противоречие – одновременную истинность противоположных суждений.

$$2) A \rightarrow B \equiv (A \& \neg B) \rightarrow \neg A$$

$$3) A \rightarrow B \equiv (A \& \neg B) \rightarrow B$$

$$4) A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A \text{ – закон контрапозиции.}$$

§5. Аксиоматические теории

Представление некоторой содержательной теории в виде формальной (она называется формализацией) позволяет выявить общие свойства, полезные аналогии и ответить на ряд общих вопросов. Формализация процесса правильных рассуждений достигается с помощью **аксиоматизации**.

Формальная аксиоматическая теория T (синонимы: формальная система, исчисление) задается следующим образом.

(1) Некоторый алфавит A символов, называемых **символами** теории. Слова в алфавите A называются **выражениями** теории T ;

(2) Выделено некоторое подмножество выражений, называемых **формулами** теории T (правильно построенные выражения).

(3) Выделено некоторое множество формул, называемых **аксиомами** теории T .

На содержательном, т.е. неформальном уровне – аксиомы суть формулы, по определению считающиеся истинными.

(4) Имеется конечное множество **правил вывода** $R_1, \dots, R_m$, каждое из которых есть отношение между формулами. Если $A_1, \dots, A_k, B$ – формулы и выполнено отношение $R_i(A_1, \dots, A_k, B)$, то B называется **непосредственным следствием** формул $A_1, \dots, A_k$, полученным по правилу R_i .

Однократное применение какого-либо правила вывода представляет формализованный элементарный шаг правильного рассуждения.

Выводом в теории T называется всякая цепочка (последовательность, или кортеж) формул $B_1, B_2, \dots, B_n$ такая, что для $i=1, 2, \dots, n$ формула B_i есть либо аксиома теории T , либо непосредственное следствие каких-либо предыдущих формул этой последовательности. Вывод есть последовательное проведение элементарных шагов, составляющее доказательное рассуждение.

Формула C называется **теоремой** теории T , если существует вывод, в котором последней формулой является C . Этот вывод называется выводом формулы C (он не единственный в теории T).

Понятно, что все формулы в выводе C , кроме аксиом, являются также теоремами теории. Таким образом, **теоремы в аксиоматической теории – это формулы, которые могут быть выведены из аксиом по принятым правилам.**

В более общем смысле, можно рассматривать вывод не только из аксиом. Пусть для множества формул $\Gamma = \{B_1, \dots, B_n\}$ существует

последовательность формул $A_1, \dots, A_m$ такая, что для любого $i = 1, \dots, m$ формула A_i – либо аксиома теории, либо формула из Γ (т.е. одна из B_i), либо непосредственное следствие предыдущих формул. Тогда A_m называется **следствием системы формул Γ** : обозначается $\Gamma \vdash A_m$, или $B_1, \dots, B_n \vdash A_m$. Последовательность $A_1, \dots, A_m$ называется выводом формулы A_m из системы Γ . Формулы системы Γ называются **посылками**, или **гипотезами**, а формула A_m – **выводимой из системы гипотез Γ** .

Частный случай, когда $\Gamma = \emptyset$, т.е. A есть следствие только аксиом, и есть теорема: обозначение $\vdash A$. Вывод теоремы называют также ее доказательством.

В гл.1 приводился пример порождающей процедуры. Можно сказать, что множество всех следствий некоторой системы формул и, в частности, теорем теории T есть результат порождающего процесса. Для порождающей процедуры характерно, что это последовательность действий, когда при каждом шаге возможны, вообще говоря, различные продолжения, которые могут приводить к различным результатам.

Отметим, что отношение “быть выводимой из системы гипотез Γ ” между заключительной формулой B_n и множеством гипотез можно рассматривать как транзитивное замыкание отношения “быть непосредственным следствием”.

Рассмотрим теперь некоторые свойства выводимости из системы гипотез; напомним, что для формальной системы обоснование должно использовать формальные определения понятий, а естественность этих свойств означает, что они содержательно отражают реальные свойства аксиоматических построений. Пусть Γ – произвольное множество формул, A, B, C – некоторые формулы.

1. $\Gamma, A \vdash A$. Это значит, что если в числе посылок кроме Γ присутствует также некоторая формула A , то A есть следствие пары $\langle \Gamma, A \rangle$. В этом случае систему Γ можно не использовать – вывод состоит из одной формулы A .

2. Если $\Gamma \vdash A$, то $\Gamma, B \vdash A$. Смысл этого выражения состоит в том,

что добавление к посылкам Γ любой формулы B не изменяет выводимости A – можно не изменять и вывод формулы A .

3. Если $(\Gamma \vdash A) \& (\Gamma \vdash B) \& (A, B \vdash C)$, то $\Gamma \vdash C$. Это значит, что если из системы Γ выводятся A и B , а из них C , то C есть следствие системы Γ . Действительно, пусть $A_1, \dots, A_m, A$ – вывод формулы A из Γ , $B_1, \dots, B_n, B$ вывод B из Γ , $C_1, \dots, C_k, C$ – вывод C из (A, B) . Тогда $A_1, \dots, A_m, A, B_1, \dots, B_n, B, C_1, \dots, C_k, C$ есть вывод C из Γ .

4. Если $(\Gamma, A \vdash B) \& (\Gamma \vdash A)$, то $(\Gamma \vdash B)$. Это правило удаления выводимой гипотезы: в выводе, содержащем A в качестве одной из посылок, можно заменить каждое вхождение формулы A на цепочку, представляющую ее вывод из системы Γ .

Формальная система потому и называется формальной, что она оперирует с формальными, абстрактными объектами: символами, словами и их последовательностями. Реальное содержание имеют интерпретации формальных систем, которые для одной и той же системы могут быть различными. Мы уже видели, что алгебра множеств и алгебра логики описываются одинаково (изоморфны).

Рассмотрим теперь пример построения по вышеуказанной схеме одного простого исчисления Z . Описание всякого исчисления содержит перечень употребляемых символов, описание формул исчисления и определение истинных формул. Рассмотрим следующую систему.

1. Алфавит A исчисления Z состоит из трех символов:

$$A = \{ |, \S, \Delta \}.$$

2. Формулы исчисления Z :

а) Исходная формула – одна: $|$.

б) Правила построения формул (α, β, γ – обозначения для формул):

ПП1. Если α – формула, то $\alpha |$ – формула.

ПП2. Если α и β – формулы, то $\alpha \S \beta$ – формула.

ПП3. Если α и β – формулы, то $\alpha \Delta \beta$ – формула.

3. Аксиома – одна: $|\S | \Delta | |$.

4. Правила вывода:

ПВ1. Если $\alpha\beta$ – выводимая формула, то $\alpha|\beta$ – выводимая формула.

ПВ2. Если $\alpha\beta\Delta\gamma$ – выводимая формула, то $\alpha\beta|\Delta\gamma$ – выводимая формула.

Правила построения формул позволяют определить для любого слова в алфавите A , является ли оно формулой исчисления Z или нет. Например, из исходной формулы, применяя несколько раз правило ПП1, можно получить формулу, представляющую собой последовательность символов $|$. Применяя правила ПП2, ПП3, можно построить, например, формулы $||\beta|$, $||\Delta|\Delta|$, $||\beta|\Delta||\beta|$, $||\beta|\Delta||\beta|$.

Покажем, например, что $||\beta|$ – формула. Нижеследующая последовательность формул представляет последовательные этапы порождающей процедуры. Для удобства рассмотрения формулы занумерованы; справа приводится комментарий, указывающий, из каких предшествующих формул и с помощью каких правил построения получается очередная формула.

1. $|$ - исходная формула
2. $||$ - 1, ПП1
3. $||\beta|$ - 2, 1, ПП2

Для формулы $||\beta|\Delta||\beta|$ порождающая процедура такова:

1. $|$ - исходная формула
2. $||$ - 1, ПП1
3. $||\beta|$ - 2, ПП1
4. $||\beta|\Delta|$ - 3, ПП1
5. $||\beta|\Delta||\beta|$ - 4, ПП1
6. $||\beta|\Delta||\beta|$ - 3, 2, ПП2
7. $||\beta|\Delta||\beta|$ - 6, 5, ПП3

Используя метод математической индукции, можно выяснить, что в любой формуле и первым, и последним символом может быть только $|$; каждый из символов β и Δ обязательно соседствует с символом $|$ как слева, так и справа, т.е. формула не может содержать подслов $\beta\beta$, $\beta\Delta$, $\Delta\beta$, $\Delta\Delta$.

Некоторые из формул являются выводимыми в рассматриваемом

исчислении Z . Покажем, что формула $|||§|| \Delta ||||$ выводима, представив ее вывод: в комментарии для каждой формулы поясняется, что такое α, β, γ – выше отмечено, что все они являются формулами.

1. $|§| \Delta ||$ - аксиома
2. $||§| \Delta |||$ - 1, ПВ1 ($\alpha = |, \beta = ||$)
3. $|||§| \Delta ||||$ - 2, ПВ1 ($\alpha = ||, \beta = |||$)
4. $|||§|| \Delta ||||$ - 3, ПВ2 ($\alpha = |||, \beta = |, \gamma = ||||$)

Упражнение. Доказать, что формула $||§|| \Delta ||||$ не является выводимой, используя следующее указание: аксиома исчисления Z содержит слева и справа от символа Δ одинаковое число (2) символов $|$; оба правила вывода добавляют по одному символу $|$ слева и справа от символа Δ .

Приведем теперь естественную интерпретацию рассмотренного исчисления. Если под $|, ||, |||$ понимать натуральные числа 1, 2, 3, ..., под " $§$ " – знак обычного сложения "+", а под " Δ " – знак обычного равенства "=", то получим **модель** исчисления Z в терминах обычной арифметики натуральных чисел с единственной операцией сложения, а приведенный вывод формулы есть доказательство теоремы " $3+2=5$ ".

Упражнение. Определите, что означает в этой интерпретации аксиома исчисления Z .

Замечание. Можно расширить исчисление Z следующим образом.

1. Алфавит дополнить знаком Ψ ;
2. Правила построения формул дополнить правилом ПП4. Если α и β – формулы, то $\alpha\Psi\beta$ – формула.
3. Включить еще одну аксиому: $|\Psi| \Delta |$.
4. Правила вывода дополнить двумя правилами:
 ПВ3. Если $\alpha\Psi|\Delta\beta$ – выводимая формула, то $\alpha|\Psi|\Delta\beta|$ – выводимая формула.
 ПВ4. Если $\alpha\Psi\beta\Delta\gamma$ и $\gamma§\alpha\Delta\delta$ – выводимые формулы, то $\alpha\Psi\beta|\Delta\delta$ – выводимая формула.

В таком расширенном исчислении выводимой является, например, формула $|||\Psi|| \Delta ||||$. Если считать символ Ψ знаком умножения $\cdot$, то

расширенное исчисление можно интерпретировать как алгебру $(N; +, \cdot)$ натуральных чисел (здесь N – натуральный ряд, начиная с 1) с операциями сложения и умножения, и последняя формула выражает утверждение “ $3 \cdot 2 = 6$ ”.

§6. Исчисление высказываний

Один из возможных способов формализации логики высказываний – построение **исчисления высказываний** в виде формальной аксиоматической теории. Описание всякого исчисления содержит описание употребляемых символов, формул исчисления и определение истинных формул. Рассмотрим следующую систему.

1. Символы исчисления высказываний:

- символы переменных с индексами и без них: $X, Y, \dots, X_i, \dots$;
- два логических символа: $\neg$ и $\vee$;
- правая и левая скобки “(” и “)”.

2. Формулы исчисления высказываний:

а) все переменные;

б) если A, B – формулы, то $(\neg A)$ и $(A \vee B)$ – тоже формулы.

Согласно этому определению, если A, B, C – формулы, то $A \vee \neg B \vee C$ – не формула (поскольку отсутствуют необходимые скобки), а $(\neg(A \vee B))$ – формула, $(\neg(A \vee (\neg B)))$ – формула, $((A \vee (\neg B)) \vee C)$ – также формула. Однако для сокращения и упрощения записи будем опускать внешние скобки в формулах, а также пары скобок, без которых можно восстановить порядок действий, соблюдая следующую договоренность: знак $\neg$ относится к кратчайшей подформуле, следующей за этим знаком. Так, формула $(\neg((\neg A) \vee B))$ примет вид $\neg(A \vee B)$, а формула $((\neg(\neg A) \vee B) \vee (\neg C))$ – вид $\neg A \vee B \vee \neg C$.

Символы $\neg$ и $\vee$ интерпретируются, конечно, в логике высказываний как операции (или функции) отрицания и дизъюнкции. Однако для удобства нетрудно ввести и другие логические операции:

$$A \& B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B.$$

Будем использовать эти знаки, но не как элементы аксиоматической системы, а как **сокращения**.

3. Аксиомы исчисления высказываний (A, B, C – любые формулы):

$$A1. A \vee A \rightarrow A$$

$$A2. A \rightarrow A \vee B$$

$$A3. A \vee B \rightarrow B \vee A$$

$$A4. (A \rightarrow B) \rightarrow (C \vee A \rightarrow C \vee B).$$

Каждую из этих аксиом можно записать через основные логические символы исчисления. Например, аксиома A3 выглядит так:
 $\neg(A \vee B) \vee (B \vee A).$

Выражения A1-A4 представляют собственно не сами аксиомы, – они называются схемами аксиом, так как вместо A, B, C в них могут быть подставлены любые формулы.

4. Единственное правило вывода - силлогизм **modus ponens** (сокращенно, м.п.), который записывается обычно в виде

$$\frac{A, (A \rightarrow B)}{B}, \text{ где над чертой записаны посылки, а под чертой –}$$

закключение. В форме вывода в аксиоматической теории это правило должно выглядеть записанным в строку: $A, A \rightarrow B \vdash B$.

Чтобы показать, как работает система, проведем подробно, с комментариями, доказательство **закона исключенного третьего**.

$$1. \vdash A \rightarrow A \vee B \quad \text{-аксиома A2}$$

$$2. \vdash A \rightarrow A \vee A \quad \text{-из 1; подстановка } A \text{ вместо } B$$

$$3. \vdash A \vee A \rightarrow A \quad \text{-аксиома A1}$$

$$4. \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((C \vee A) \rightarrow (C \vee B)) \quad \text{-аксиома A4}$$

5. $\vdash (A \vee A \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow A \vee A) \rightarrow (A \rightarrow A))$ -из 4; подстановка $A \vee A$ вместо A , A вместо B , $\neg A$ вместо C (учитывая, что $p \rightarrow q$ есть сокращение $\neg p \vee q$; подробнее этот переход рассмотрен ниже)

$$6. \vdash (A \rightarrow A \vee A) \rightarrow (A \rightarrow A) \text{ -из 3 и 5 в силу м.п.}$$

$$7. \vdash A \rightarrow A, \text{ т.е. } \neg A \vee A \quad \text{-из 2 и 6 в силу м.п.}$$

$$8. \vdash A \vee B \rightarrow B \vee A \quad \text{-аксиома A3}$$

$$9. \vdash \neg A \vee A \rightarrow A \vee \neg A \quad \text{-из 8; подстановка } \neg A \text{ вместо } A \text{ и } A \text{ вместо } B$$

$$10. \vdash A \vee \neg A \quad \text{-из 7 и 9 в силу м.п.}$$

Последняя формула означает, что из двух противоположных

высказываний A и $\neg A$ хотя бы одно истинно, поскольку их дизъюнкция тождественно истинна.

Представим детально переход от формулы 4 к формуле 5:

формула 4 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \vee A) \rightarrow (C \vee B))$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

подстановка $A \vee A \quad A \quad \neg A \quad A \vee A \quad \neg A \quad A$

результат $(A \vee A \rightarrow A) \rightarrow ((\neg A \vee (A \vee A)) \rightarrow (\neg A \vee A))$

подстановки $\langle \neg p \vee q \rangle \quad \langle \neg p \vee q \rangle$

замена дизъюнкций на импликации $A \rightarrow A \vee A \quad A \rightarrow A$
 $\langle p \rightarrow q \rangle \quad \langle p \rightarrow q \rangle$

формула 5 $(A \vee A \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow A \vee A) \rightarrow (A \rightarrow A))$

Для исчисления высказываний кроме общих свойств 1-4 выводимости выполнено также свойство

5. Если $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ и $\Gamma \vdash A$, то $\Gamma \vdash B$.

Действительно, если $C_1, \dots, C_m$ – вывод формулы A из системы Γ (т.е. последняя в цепочке формула C_m совпадает с A), а $D_1, \dots, D_n$ – вывод формулы $A \rightarrow B$ из Γ (аналогично, D_n совпадает с $A \rightarrow B$), то последовательность $C_1, \dots, C_m, D_1, \dots, D_n$ представляет собой вывод формулы B из системы Γ . Последняя формула в этой последовательности является следствием предыдущих как раз в силу правила *modus ponens* (обе посылки C_m и D_n встречаются в этой последовательности).

Важное свойство в формальном исчислении высказываний составляет

Теорема о дедукции. Если для формул A , B и системы Γ выполнено $\Gamma, A \vdash B$, то выполнено $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Использование теоремы о дедукции позволяет утверждать истинность условного высказывания “если A , то B ”.

Укажем 3 следствия теоремы о дедукции.

Следствие 1. (правило силлогизма). $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$.

Следствие 2. $A \rightarrow (B \rightarrow C), B \vdash A \rightarrow C$.

Следствие 3. Если $\Gamma, A \vdash B$ и $\Gamma, \neg A \vdash B$, то $\Gamma \vdash B$ (если из системы Γ с добавлением формулы A выводится формула B и с добавлением формулы $\neg A$ также выводится формула B , то B выводится просто из системы Γ , т.е. формулу A можно не использовать в выводе).

Основной содержательный результат формализации логики высказываний в виде исчисления высказываний формулируется как соотношение между выводимостью формул в исчислении и истинностью логических формул в логике высказываний. Справедлива

Теорема (о выводимости тавтологий). Формула A исчисления высказываний выводима (из пустой системы гипотез, т.е. только из аксиом) тогда и только тогда, когда она тождественно истинна (тавтология) в логике высказываний (т.е. представляет тождественно равную 1 булеву функцию).

Доказательство теоремы мы проводить не будем; заметим, только, что аксиомы исчисления высказываний – тождественно истинные формулы (это нетрудно проверить, построив таблицы истинности соответствующих функций двух и трех переменных), а правило *modus ponens* из тождественно истинных формул порождает тождественно истинную формулу в силу свойств операции импликации. Поэтому всякая выводимая в исчислении формула тождественно истинна, или, другими словами, выводимы только тождественно-истинные формулы.

Свойство аксиоматической теории, состоящее в том, что выполняется обратное утверждение, т.е. что всякая тождественно истинная формула выводима, называется **полнотой** аксиоматической теории. Предыдущая теорема утверждает, что исчисление высказываний в предложенной форме полно.

Другое важное требование к аксиоматике: ни для какой формулы A не должны быть выводимы обе формулы A и $\neg A$. Аксиоматическая теория с таким свойством называется **непротиворечивой**. Нетрудно показать, что исчисление высказываний непротиворечиво. В самом деле, согласно теореме о выводимости тавтологий, всякая выводимая формула A – это тавтология. Отрицание этой формулы $\neg A$ не является тавтологией (подумайте, какую функцию выражает формула $\neg A$): следовательно, она не выводима.

Еще один естественный вопрос – о независимости системы аксиом, т.е. о возможности или невозможности вывести одну из аксиом из остальных. Можно доказать, что для рассмотренной нами формы исчисления высказываний выполнено условие независимости.

В заключение заметим, что логику высказываний можно формализовать и другими системами, с использованием других систем аксиом. В том числе для удобства система аксиом может не быть

независимой, подобно тому, как в качестве основной полной системы булевых функций мы рассматривали систему из трех функций ($\neg, \vee, \&$), хотя одну из двух последних можно устранить, поскольку она выражается суперпозицией остальных двух.

Например, одна из часто применяемых систем содержит вместо упомянутых четырех следующие три аксиомы:

$$\text{В1. } A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$\text{В2. } (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$\text{В3. } (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$$

Остальное: символы, правила построения формул и правило вывода (т.р.) – те же, что и в рассмотренном выше исчислении.

ГЛАВА 5. ПРЕДИКАТЫ

§1. Операции над предикатами

1. Область истинности.

В базовом курсе мы встречались с понятием неопределенного высказывания, или высказывания, содержащего переменные, при различных значениях которых высказывание становится истинным или ложным. Рассмотрим это понятие с функциональной точки зрения.

Предикат – функция P типа: $M^n \rightarrow B$, где $B = \{0,1\}$, M – произвольное множество, т.е. функция P , сопоставляющая вектору $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ значение 0 или 1. Множество M называется **предметной областью** предиката $P(m_1, m_2, \dots, m_n)$; $m_1, m_2, \dots, m_n$ – **предметными переменными**, P – предикатным символом. Употребляется выражение: **n -местный предикат на множестве M** ; число n называется **местностью** предиката.

В более общем смысле предикатом называется отображение $P: M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \rightarrow B$, где M_i могут быть различными множествами. Прямое произведение $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ будем называть областью определения предиката P .

Область истинности предиката P – подмножество $I_P \subseteq M^n$ предметной области предиката P , на элементах которого значения предиката равны 1.

Примеры. 1) Одноместный предикат $P(X)$ на множестве натуральных чисел: “при делении на 3 число X дает остаток 2”. Область истинности – множество чисел вида $3n + 2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

2) Двуместный предикат $Q(X, Y)$: “при делении на 3 число X дает остаток Y ”. Предметная область для $Q(X, Y)$ – множество пар (a, b) , где a и b – натуральные числа, причем $b \in \{0, 1, 2\}$. Область истинности – на рис.20.

3) Трехместный предикат $R(X, Y, Z)$: “при делении на Z число X дает остаток Y ”. Предметная область – множество троек (X, Y, Z) , где

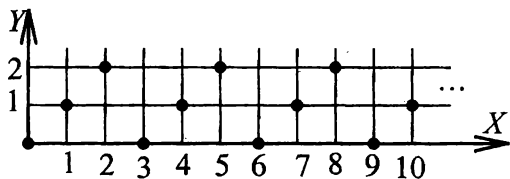


Рис. 20.

$$X, Y, Z \in \mathbb{N}, Z \neq 0, 0 \leq Y < Z.$$

Область истинности – множество целочисленных точек трехмерного пространства в I октанте, если при некотором k выполнено равенство

$$X = k \cdot Z + Y.$$

Упражнение. Проверьте, что $R(16, 2, 7) = 1$, $R(12, 3, 5) = 0$, $R(18, 0, 6) = 1$.

4) 4-местный предикат $P(\lambda, L, M, N)$: “плоскость λ содержит точки L, M, N ”. Для плоскости $\lambda: 3X - 2Y + 4Z + 7 = 0$ и точек $L(-3, -5, -2)$, $M(5, 13, 1)$, $N(7, -4, -9)$ предикат P равен 1. Если же вместо точки M взять точку $M(2, 6, 0)$, то $P = 0$.

Характеристическую функцию множества $M \subseteq U = \{X\}$ можно рассматривать как предикат $P(X): X \in M$ на U .

Любому n -арному отношению $R(m_1, m_2, \dots, m_n)$ можно взаимно однозначно сопоставить n -местный предикат, равный 1 для тех и только тех наборов $(m_1, m_2, \dots, m_n)$, для которых выполнено $R(m_1, m_2, \dots, m_n)$.

2. Кванторы.

Над предикатами на M можно производить логические операции и получать новые предикаты. Операции над предикатами суть операции над соответствующими отношениями: конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, импликация и др. Состав переменных и предметная область предиката, полученного в результате операции, определяется при этом естественным образом. Например, $P(X_1, X_2, \dots, X_n) \& Q(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = R(X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$, где $X_1 \in M_1, X_2 \in M_2, \dots, X_n \in M_n$, $Y_1 \in N_1, Y_2 \in N_2, \dots, Y_n \in N_n$; среди переменных X_i, Y_j могут быть совпадающие, так же как и среди множеств M_i и N_j .

Примеры: а) Пусть $R(X, Y) = P(X) \& Q(Y)$, $X \in M$, $Y \in N$, двуместный предикат $R(X, Y)$ имеет область определения $S = M \times N$;

б) $R(X, Y) = P(X) \& Q(Y)$, $X \in M$, $Y \in M$, но X и Y – разные

предметные переменные; область определения двуместного предиката $R(X, Y)$ – множество $S = M^2$;

в) $R(X) = P(X) \& Q(X)$: у предикатов $P(X) \& Q(X)$ – общая предметная область и одинаковая переменная; $R(X)$ – одноместный предикат на M .

Упражнение. На примере предикатов $P(X): X > 2$ и $Q(Y): Y < 5$ постройте предикаты $P(X) \& Q(X)$, $P(X) \vee Q(X)$, $P(X) \rightarrow Q(X)$, $Q(X) \rightarrow P(X)$, $P(X) \vee Q(Y)$, $P(X) \& Q(Y)$, $P(X) \rightarrow Q(Y)$, $P(Y) \& Q(X)$.

Пример: $P(X) \rightarrow Q(X)$. Это означает: “если выполнено $P(X)$, то выполнено $Q(X)$ ”, т.е. “если $(X > 2)$, то $(X < 5)$ ”, или, выражая импликацию через дизъюнкцию, “ $\neg(X > 2) \vee (X < 5)$ ”. Наконец, можно устранить отрицание: “ $(X \leq 2) \vee (X < 5)$ ”. Отсюда получаем окончательно: “ $(X < 5)$ ”.

Существуют и другие операции над предикатами. Если $P(X, Y)$ – двуместный предикат, то фиксирование, или конкретизация одной переменной превращает его в одноместный. Пусть, например, $P(X, Y)$: “число X делится на число Y ”, определенный на множестве пар натуральных чисел N , кроме пар $(X, 0)$. Тогда $P(X, 5)$ – одноместный предикат на N , истинный для всех чисел, кратных 5. $P(60, Y)$ – одноместный предикат на N , кроме $Y = 0$, истинный для всех делителей числа 60, т.е. для элементов множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$. Заметим, что если зафиксировать значения всех переменных, то предикат превращается в истинное или ложное высказывание, которое можно считать 0-местным предикатом.

Для предикатов определяются две специфические операции, называемые **навешиванием кванторов**, которые превращают одноместный предикат $P(X)$ в 0-местный:

квантор всеобщности – высказывание: “для всех X выполнено $P(X)$ ”, обозначение $\forall X : P(X)$;

квантор существования – высказывание: “существует X , для которого выполнено $P(X)$ ”, обозначение $\exists X : P(X)$.

Процедура навешивания кванторов на предикат применима не только к одноместным, но и к предикатам большей местности: в этом случае говорят также, что квантор навешивается на определенную переменную данного предиката.

Рассмотрим трехместный предикат $P(X, Y, Z)$; он является истинным для некоторых троек (X, Y, Z) . Предикату P можно сопоставить выражения с кванторами $\forall X : P(X, Y, Z)$ и $\exists X : P(X, Y, Z)$; первое означает: “для всякого X выполнено $P(X, Y, Z)$ ”, второе – “существует X такой, что выполнено $P(X, Y, Z)$ ”.

Пусть, например, $P(X, Y, Z) = 3X - 2Y > Z$ с предметной областью – множеством действительных чисел R , область истинности предиката P – полупространство по одну сторону от плоскости $3X - 2Y = Z$. Ему можно сопоставить выражения

$$Q_1(X, Y) = \forall X : 3X - 2Y > Z \text{ и } Q_2(X, Y) = \exists X : 3X - 2Y > Z.$$

Полученные двуместные предикаты зависят от Y и Z , но не зависят от X . Этот факт выражается так: переменная X в указанных предикатах **связана квантором**, а переменные Y, Z – **свободные**. Вообще, **связанные (свободные) переменные** – это переменные, на которые навешены (соответственно, не навешены) кванторы: $\forall X$ или $\exists X$.

Смысл связанных и свободных переменных в предикатных выражениях различен. Свободные переменные – это обычные переменные; они могут принимать значения из предметной области; выражение $P(X)$ – переменное высказывание, зависящее от значения X . В то же время выражение $\forall X : P(X)$ не зависит от X и при фиксированных предикате P и предметной области имеет вполне определенное значение: 0 или 1. Это, в частности, означает, что переименование связанной переменной, т.е. замена $\forall X : P(X)$ на $\forall Y : P(Y)$ или $\forall Z : P(Z)$, не меняет истинности выражения.

Переменные, являющиеся по существу связанными, встречаются

не только в логике. Например, в выражениях $\sum_{X=1}^{10} f(X)$ или $\int_a^b f(X)dX$

переменная X связана; при фиксированной f первое выражение равно определенному числу $f(1) + f(2) + \dots + f(10)$, а второе является функцией от a и b .

На предикат с навешенным квантором можно снова навешивать квантор, если у него есть свободные переменные. Если кванторы навешены на все переменные, предикат становится 0-местным, т.е. высказыванием.

Пример. Для рассмотренного выше предиката $P(\lambda, L, M, N)$ предикат $\exists \lambda : P(\lambda, L, M, N)$ означает, что существует плоскость, содержащая 3 данные точки L, M, N . Двуместный предикат $\forall L : (\exists \lambda : P(\lambda, L, M, N))$ – его можно записать короче: $\forall L \exists \lambda : P(\lambda, L, M, N)$ – означает: для любой точки L существует плоскость λ , содержащая эту точку и 2 данные точки M, N . Наконец, предикат

$$\forall L : (\forall M : (\forall N : (\exists \lambda : P(\lambda, L, M, N)))) ,$$

$$\text{или } \forall L : \forall M : \forall N : \exists \lambda : P(\lambda, L, M, N)$$

выражает истинное высказывание о том, что для любых трех точек существует содержащая их плоскость.

Область действия квантора – выражение, на которое навешивается квантор. Для устранения разночтений оно может быть заключено в скобки.

Пример. 1) $(\forall X : P(X, Y)) \vee Q(X)$,

2) $\forall X : ((P(X, Y) \vee Q(X)))$.

Пусть $P(X, Y) = "X > Y"$, $Q(X) = "X - \text{четное число}"$ – два предиката на множестве натуральных чисел $N = \{0, 1, 2, \dots\}$. Тогда в первом выражении область действия квантора – $P(X, Y)$, а во втором – $P(X, Y) \vee Q(X)$. Соответственно, область истинности первого выражения (двуместного предиката: переменная X связана в $P(X, Y)$,

но свободна в $Q(X)$ – множество пар (X, Y) , для которых выполнено либо “ X – четное, Y – любое”, либо “ X – любое, $Y = 0$ ”. Для второго выражения (одноместного предиката с переменной Y) область истинности состоит из двух чисел $Y \in \{0, 1\}$.

§2. Предикатные формулы. Тавтологии

Предикатная формула (формула логики предикатов) – формула, содержащая знаки булевых операций и кванторов.

Более точно, в формулах участвуют:

- символы предметных переменных $X, Y, Z, \dots$;
- символы предикатов;
- логические символы $\neg, \&, \vee, \rightarrow, \sim$;
- символы кванторов $\forall X$ и $\exists X$.

Предикатной формулой (одновременно определяются понятия свободных и связанных переменных) называется выражение, построенное по следующим правилам.

1. Если P – символ предиката, $X_1, X_2, \dots, X_n$ – символы переменных (не обязательно различных), то $P(X_1, X_2, \dots, X_n)$ – предикатная формула; все ее переменные – свободные.

2. Если A – формула, то $\neg A$ – тоже формула с теми же свободными и связанными переменными.

3. Если A, B – формулы и нет переменных, свободных в одной из них и связанных в другой, то $A \& B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \sim B$ – тоже формулы с теми же свободными и связанными переменными.

4. Если A – формула, содержащая свободную переменную X (и, быть может, другие переменные – свободные и связанные), то выражения $\forall X: A(X)$ и $\exists X: A(X)$ – предикатные формулы; в каждой из них переменная X переходит из множества свободных в множество связанных, т.е. число свободных переменных уменьшается, а число связанных увеличивается на 1. При этом формула A называется областью действия квантора.

В формуле должны быть правильным образом расставлены скобки, определяющие области действия кванторов и порядок выполнения логических и кванторных операций. Однако для сокращения записи могут быть удалены излишние скобки (считается, что знак квантора

связывает сильнее, чем знак логической операции), также можно записывать кванторные формулы без знака “:”.

Пример. Пусть $P(X, Y) = X \leq Y$ для действительных чисел $X, Y \in \mathbb{R}$. Это 2-местный предикат с предметной областью на числовой плоскости. Область истинности – полуплоскость, ограниченная биссектрисой I и III координатных углов, включающая точки границы (на рис.21 показано штриховкой). Формулы $\forall X : P(X, Y)$ и $\forall Y : P(X, Y)$ – одноместные предикаты со свободными переменными Y и, соответственно, X . Область истинности – пустое множество, так как не существует ни наибольшего, ни наименьшего среди действительных чисел. Предикат $\exists X : P(X, Y)$ – одноместный со свободной переменной Y : Его область истинности – вся числовая ось, так как какое бы ни было Y , существует меньшее число X .

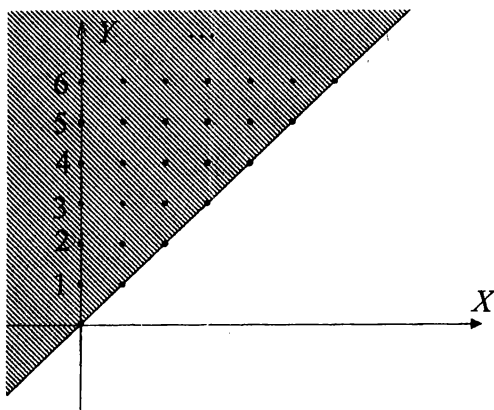


Рис. 21.

Рассмотрим тот же предикат $P(X, Y) = X \leq Y$ на предметной области натуральных чисел: $X, Y \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Область истинности предиката – целочисленные точки I координатного угла, включая точки оси абсцисс, расположенные над биссектрисой и на ней (на рис.21 показано выделенными точками). Область истинности для предиката $\forall X : P(X, Y)$ – пустое множество, а для $\forall Y : P(X, Y)$

область истинности состоит из одного числа 0. Отсюда можно заключить, что предикат $\exists X : (\forall Y : P(X, Y))$ есть истинное высказывание (обе переменных – связанные), поскольку существует наименьшее натуральное число – 0.

Упражнение. Определите истинность следующих высказываний для $X, Y \in \mathbb{N}$

$$\forall X \forall Y : X < Y ; \exists X \exists Y : X < Y ; \forall Y \exists X : X < Y ; \exists Y \forall X : X < Y .$$

Примеры. 1) Для предиката $P(X, Y) = X \leq Y$ формула

$$P(X, Y) \& P(Y, X)$$

выражает предикат $X = Y$. Тот же предикат $P(X, Y)$ может быть выражен через 3-местный предикат на множестве натуральных чисел $Q(S, T, U) = S + T = U$ следующим образом: $P(X, Y) = \exists S : Q(S, X, Y)$, т.е. существует такое S , что $X + S = Y$, или $Y - X = S \geq 0$. Формула $\exists S : Q(S, S, X)$ означает, что X – четное число ($X = S + S$). Наконец, формула $P(X, Y) \& \neg P(Y, X)$ выражает условие $X < Y$.

2) Рассмотренный выше предикат $R(X, Y, Z)$: “при делении на Z число X дает остаток Y ” может быть выражен предикатной формулой $\exists k (X = kZ + Y), k \in N$.

Область истинности предиката, выраженного предикатной формулой, определяется областями истинности составляющих и применяемыми в формуле операциями:

$$I_{P \vee Q} = I_P \cup I_Q; I_{P \& Q} = I_P \cap I_Q; I_{\neg P} = \overline{I_P}.$$

$$\text{Особо выделим свойство } I_{P \rightarrow Q} = \overline{I_P} \cup I_Q.$$

Упражнение. Выразить $I_{P \sim Q}$ и $I_{P \oplus Q}$ через I_P и I_Q .

Эквивалентные предикатные формулы – формулы, у которых области истинности совпадают.

В §2 гл.III определялась эквивалентность для формул логики высказываний, т.е. формул, выражающих булевы функции с помощью ограниченного набора символов логических операций, каждый из которых ($\&, \vee, \neg$ и др. обозначает одну конкретную функцию). Сложнее обстоит дело с формулами логики предикатов. Ввиду разнообразия отношений на множествах различной природы и разной мощности (в том числе, бесконечных) за обозначениями предикатов $A(X)$, $B(X, Y)$, $C(X, Y, Z)$ могут стоять многие конкретные предикаты.

Интерпретация – это сопоставление каждому предикатному символу в формуле определенного предиката. Пусть две формулы F и G содержат одно и то же множество свободных переменных (может быть, пустое).

Формулы F и G равносильны в данной интерпретации, если они выражают один и тот же предикат (т.е. при одинаковых значениях предметных переменных они принимают одинаковые значения).

Пример: Если $P(X,Y) = X > Y$, $Q(X,Y) = X \leq Y$, то $\bar{P}(X,Y)$ и $Q(X,Y)$ – равносильные формулы; при других интерпретациях P и Q эти формулы могут не быть равносильными.

Формулы F и G равносильны на множестве M , если они равносильны во всех интерпретациях на этом множестве.

Пример: $\exists X : P(X)$ и $\forall X : P(X)$ равносильны на одноэлементном множестве M : если существует подходящий X , то, поскольку других значений нет, истинно и второе суждение. На множестве, содержащем более одного элемента, это уже не так.

Формулы F и G равносильны в логике предикатов, если они равносильны на всех множествах. В этом случае можно называть эту равносильность **тождеством** в логике предикатов, или законом логики предикатов и обозначать $F \equiv G$.

Для предикатных формул сохраняются все равносильности логики высказываний. Кроме того, справедливы такие эквивалентности для кванторных формул.

1. Перенос квантора через отрицание (законы де Моргана для предикатов): $\neg \forall X : A(X) \equiv \exists X : \neg A(X)$; $\neg \exists X : A(X) \equiv \forall X : \neg A(X)$.

2. Вынесение квантора за скобки.

Если формула $A(X)$ содержит свободную переменную X , а формула B не содержит X и в них нет переменных, свободных в одной из формул и связанных в другой, то:

$$\exists X : (A(X) \& B) \equiv (\exists X : A(X)) \& B;$$

$$\forall X : (A(X) \& B) \equiv (\forall X : A(X)) \& B;$$

$$\exists X : (A(X) \vee B) \equiv (\exists X : A(X)) \vee B;$$

$$\forall X : (A(X) \vee B) \equiv (\forall X : A(X)) \vee B.$$

3. Законы коммутативности для одноименных кванторов.

$$\forall X : (\forall Y : A(X,Y)) \equiv \forall Y : (\forall X : A(X,Y));$$

$$\exists X : (\exists Y : A(X,Y)) \equiv \exists Y : (\exists X : A(X,Y)).$$

Коммутативность дает возможность использовать более короткую запись: $\forall X,Y,Z : P(X,Y,Z)$ или $\exists X,Y : Q(X,Y,Z)$ и т.п.

Следует отметить различие между логическими интерпретациями формул в логике высказываний – приписывание логическим переменным истинностных значений, которое определяет значение булевой функции – и в логике предикатов – задание отображения

предметной области на $\{0,1\}$. Простое высказывание допускает 2

возможных значения, а сложное, составленное из n простых – 2^n . В отличие от высказываний предикат имеет, вообще говоря, бесконечное множество интерпретаций. Во-первых, может быть бесконечной область определения предиката, и предикатному символу можно сопоставить бесконечное множество различных функций. Во-вторых, предикат

$P(m_1, m_2, \dots, m_n)$ можно рассматривать на различных множествах M .

Конечно, многие предикаты, например, выражающие часто встречающиеся отношения, такие как "=", ">", "<" и др., имеют стандартные обозначения и вполне определенный (или оговоренный в пределах контекста) смысл.

С точки зрения истинности для предикатных формул вводятся следующие понятия.

Формула F называется **выполнимой (непротиворечивой)**, если существует интерпретация, в которой F имеет истинное значение, т.е. область истинности не пуста.

Тавтологически истинная (общезначимая) формула, или тавтология – формула, для которой при любой ее интерпретации область истинности совпадает с областью определения.

Тавтологически ложная (противоречивая) формула – это формула, для которой область истинности пуста.

Обозначение тавтологии: $\vdash F$; для тавтологически ложной: $\vdash \neg F$.

Формула F общезначима тогда и только тогда, когда формула $\neg F$ не является выполнимой; формула F выполнима тогда и только тогда, когда $\neg F$ не является общезначимой.

Некоторые общезначимые формулы:

1. Если F и G – равносильные в логике предикатов формулы, то $F \sim G$ – общезначимая формула. При этом $I_F = I_G$.

Если $F \rightarrow G$ – общезначимая формула, то $I_F \subseteq I_G$.

2. Если Y не входит в формулу $P(X)$, то $\forall X : P(X) \rightarrow P(Y)$ и $P(Y) \rightarrow \exists X : P(X)$ – общезначимые формулы.

3. Приведенные выше тождества для кванторных формул.

Квантор всеобщности есть обобщение операции конъюнкции, а квантор существования – обобщение дизъюнкции, и, тем самым, законы де Моргана для предикатов характеризуют взаимную двойственность кванторов $\forall X$ и $\exists X$.

$$4. \forall X : (P(X) \& Q(X)) \equiv \forall X : P(X) \& \forall X : Q(X).$$

Двойственным к этому тождеству является такое:

$$5. \exists X : (P(X) \vee Q(X)) \equiv \exists X : P(X) \vee \exists X : Q(X).$$

6. Выше отмечена возможность перестановки одноименных кванторов, т.е. эти эквивалентности – общезначимые формулы.

7. Импликация $\exists X : (\forall Y : P(X, Y)) \rightarrow \forall Y : (\exists X : P(X, Y))$ является тавтологией. Однако схожая формула $\forall X : (\exists Y : P(X, Y)) \rightarrow \rightarrow \exists Y : (\forall X : P(X, Y))$ уже не является тавтологией.

Общая схема разновидности двух последних импликаций проиллюстрирована на рис.22. Если (рис.22а) в области истинности I_P предиката $P(X, Y)$ существует значение $X = X_0$, одинаковое для всех Y (т.е. все пары (X_0, Y) принадлежат I_P), то тем более для каждого Y существует X , например X_0 . Стрелкой показано, что из истинности формулы (а) следует истинность формулы (б). Перечеркнутая стрелка в обратном направлении означает, что обратное заключение не верно: различным значениям Y могут соответствовать разные значения X .

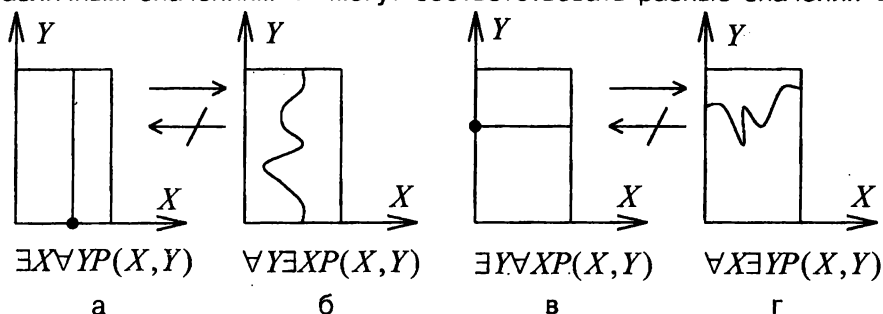


Рис. 22.

Симметричным образом, из истинности формулы (в) следует истинность формулы (г), но не наоборот.

• Проведенное рассуждение иллюстрируется следующим примером.

Пусть $\{X\}$ – множество книг в библиотеке института; $\{Y\}$ – множество студентов группы; предикат $P(X, Y)$ означает “студент Y прочитал книгу X ”. В посылке первой формулы утверждается, что существует книга (обозначим ее K), которую прочитали все студенты группы. Из этого действительно следует заключение первой формулы:

каждый студент группы прочитал какую-либо книгу, например, упомянутую книгу K . Однако, если каждая книга библиотеки прочитана каким-либо студентом (такова посылка второй формулы), то это не значит, что есть студент, прочитавший все эти книги.

Теорема о подстановке.

Пусть F – тождественно истинная формула логики высказываний. Тогда подстановка вместо ее переменных $X_1, X_2, \dots, X_n$ предикатных формул $B_1, B_2, \dots, B_n$ такая, что получается правильная предикатная формула, дает общезначимую формулу логики предикатов.

Вопрос о распознавании общезначимости формул логики предикатов относится к предмету теории алгоритмов. Не уточняя пока соответствующих понятий, сформулируем важный результат.

Теорема Черча. Не существует алгоритма, который для любой формулы логики предикатов устанавливал бы, общезначима она или нет.

Отметим однако, что в некоторых частных случаях такой алгоритм существует, например, для формул, содержащих только одноместные предикатные символы.

§3. Исчисление предикатов

Метод доказательства формул, содержащих переменные, путем непосредственной подстановки в них предметных констант называется методом интерпретаций, или методом моделей. Подстановка констант позволяет интерпретировать формулу как содержательное утверждение об элементах конкретного множества. Поэтому такой метод, апеллирующий к содержательному смыслу интерпретированной формулы называют семантическим, т.е. смысловым. Это удобно при доказательстве выполнимости формул или их неэквивалентности, поскольку и в том и в другом случае достаточно найти одну подходящую подстановку (интерпретацию).

Метод интерпретаций можно применять и для исследования истинности формул на конечных предметных областях, так как если область M конечна, $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$, то кванторы выражают конечные формулы логики высказываний:

$$X : P(X, Y) \equiv P(m_1) \& P(m_2) \& \dots \& P(m_n),$$

$$X : P(X, Y) \equiv P(m_1) \vee P(m_2) \vee \dots \vee P(m_n).$$

В этом случае все кванторные формулы можно заменить указанным способом и получить формулы, содержащие только символы предикатов и логических операций, после чего проверить истинность можно

конечным числом подстановок констант.

Для большинства же предметных областей доказательство тождественной истинности формул методом интерпретаций связано с большими трудностями. Поэтому применяется другой прием - аксиоматизация, т.е. построение формальной системы и порождение исследуемых формул из аксиом с помощью процедур вывода.

Как и для исчисления высказываний, для предикатных формул построение исчисления проводится путем указания некоторой совокупности формул, которые называются аксиомами, и заданием правил вывода, позволяющих из общезначимых формул получать общезначимые.

Мы рассмотрим здесь аксиоматическую теорию, представляющую частный случай исчисления предикатов. Символы теории – те же, что в определении предикатных формул в §2. Предикатные формулы определим так же, но в качестве логических символов будем использовать, как и в варианте исчисления высказываний (см. §6 гл.4), только два: $\neg$ и $\rightarrow$ (остальные можно ввести, применяя соответствующие эквивалентности для булевых функций).

Аксиомы исчисления предикатов.

Аксиомы A1-A4 совпадают с такими же для исчисления высказываний.

A5. $\forall X_i (P(X_i) \rightarrow P(X_j))$, где формула $P(X_i)$ не содержит переменной X_j .

A6. $P(X_i) \rightarrow \exists X_j (P(X_j))$ с тем же условием, что и в A5.

Правила вывода (при этом не должны нарушаться требования к правильности формул):

1. Правило modus ponens

$$\frac{A, (A \rightarrow B)}{B}$$

2а. Правило связывания квантором $\forall$:

$$\frac{B \rightarrow A(X_i)}{B \rightarrow \forall X_i A(X_i)}, \text{ где формула } B \text{ не содержит переменной } X_i.$$

2б. Правило связывания квантором $\exists$:

$$\frac{A(X_i) \rightarrow B}{\exists X_i A(X_i) \rightarrow B}, \text{ где формула } B \text{ не содержит переменной } X_i.$$

3. Переименование связанной переменной: связанную переменную формулы A можно заменить в кванторе и во всех вхождениях в области

действия квантора.

Понятия вывода, теоремы, вывода из системы гипотез определяются в исчислении предикатов так же, как в любой аксиоматической теории.

Приведем без доказательства несколько утверждений об исчислении предикатов ($A, B, \dots$ – формулы в исчислении).

Теорема 1. Если $A \vdash B$ и существует вывод формулы B из формулы A , использующий только правило modus ponens, то $\Gamma \vdash (A \rightarrow B)$.

Теорема 2. Аксиомы исчисления предикатов – общезначимые формулы.

Теорема 3. Формула, получаемая из общезначимой по любому правилу вывода 1-3, является общезначимой.

Из двух последних теорем следует

Теорема 4. Любая выводимая в исчислении предикатов формула – общезначима.

Теорема 5. Исчисление предикатов непротиворечиво, так как в силу теоремы 4 невозможно вывести одновременно A и $\neg A$.

Определенное выше исчисление предикатов называют узким исчислением предикатов; в отличие от не рассматриваемого нами расширенного исчисления, в котором допускаются кванторы не только по предметным переменным, но и по предикатным переменным, т.е. возможны формулы вида $\forall P: P(X \dots)$ – “для всякого предиката P $P(X \dots)$ ” – или $\exists P: P(X \dots)$ – “существует предикат P такой что $P(X \dots)$ ”.

Теорема 6 (Гёделя). В узком исчислении предикатов всякая общезначимая формула выводима.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Составьте логическую схему базы знаний по теме юниты.

2. Для выполнения работы (задачи 1–10) необходимо определить и записать в табл.К1 значения булевых переменных $a_1 - a_{36}$, исходя из следующих параметров:

H – порядковый номер студента в списке группы;

Φ – число букв в фамилии студента.

Впишите свои параметры в табличку.

$H =$	$\Phi =$
-------	----------

Значения $a_1 - a_{36}$ выбираются из табл.К2 по следующему правилу:

$a_1 - a_8$ – 8 чисел подряд, начиная с позиции H ;

$a_9 - a_{22}$ – 14 чисел подряд, начиная с позиции $H + \Phi + 8$;

$a_{23} - a_{32}$ – 10 чисел подряд, начиная с позиции $H + 2\Phi + 22$;

$a_{33} - a_{36}$ – 4 числа подряд, начиная с позиции $H + 3\Phi + 32$.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}

a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}

a_{25}	a_{26}	a_{27}	a_{28}	a_{29}	a_{30}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}

Табл. К1.

	1				5				10				15				20			
20+	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0
40+	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0
60+	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
80+	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
100+	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1
120+	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1

Табл. К2.

$X Y Z$	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}
0 0 0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0
0 0 1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
0 1 0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0 1 1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1
1 0 0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0
1 0 1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1
1 1 0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1
1 1 1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0

$X Y Z$	g_{13}	g_{14}	g_{15}	g_{16}	g_{17}	g_{18}	g_{19}	g_{20}	g_{21}	g_{22}	g_{23}	g_{24}
0 0 0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0
0 0 1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0
0 1 0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1
0 1 1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0
1 0 0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1
1 0 1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0
1 1 0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0
1 1 1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1

Табл. К3

$X Y Z T$	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	h_9	h_{10}	h_{11}	h_{12}
0 0 0 0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1
0 0 0 1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0
0 0 1 0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0
0 0 1 1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1
0 1 0 0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0
0 1 0 1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1
0 1 1 0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
0 1 1 1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1
1 0 0 0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
1 0 0 1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
1 0 1 0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0
1 0 1 1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
1 1 0 0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1
1 1 0 1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1 1 1 0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1
1 1 1 1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0

Табл. К4.

3. Перевести в десятичную систему двоичное число $a_1a_2a_3a_4$ и прибавить 1. Полученное число i определяет номер функции Φ_i . Построить схему, которая, исходя из символов переменных X, Y, Z и констант 1, 2, 3, 4, 5, 6, π вычисляет функцию Φ_i ; можно использовать функциональные элементы, реализующие:

- одноместные функции $\sin X$, $\cos X$, $\operatorname{tg} X$, $\ln X$, $\sqrt{X}$, 2^X ;
- двуместные операции $A+B$, $A-B$, $A \times B$, A/B , $\max(A, B)$, $\min(A, B)$.

$$\Phi_1 = \ln(2^{X-2Y} + \ln(X+Y))$$

$$\Phi_2 = \ln(\max(X, 2Y) - \cos 2Y)$$

$$\Phi_3 = \operatorname{tg}(X + 1/(Y + \sin(YZ)))$$

$$\Phi_4 = \operatorname{tg}(1 - (1 - Z/Y)/(3 + Y/Z))$$

$$\Phi_5 = \max(X \cdot \sqrt{Y-2Z}, Z\sqrt{Y})$$

$$\Phi_6 = \ln(\max(Y, 2X)) + 2 \ln(\min(X, 2Y))$$

$$\Phi_7 = \sqrt{4/X + X/4} \cdot 2^{1-XYZ}$$

$$\Phi_8 = X^4 - 3X^3 + X - 6$$

$$\Phi_9 = (X^2 + 2X - 5)/(2X^2 - 2X + 5)$$

$$\Phi_{10} = \sqrt{X/5 - 5/Y} / \ln(\ln(2^X - 1))$$

$$\Phi_{11} = 2^{2^X} + Y^{2^X} - X^{2^Y}$$

$$\Phi_{12} = \sin(\pi/3 - X/10) \cos(\pi/3 + 2/X)$$

$$\Phi_{13} = \sqrt[4]{\min(X^2Y, 2 - YZ)}$$

$$\Phi_{14} = 3 \cos^2(Y - 2X^2) - \cos(2X/Y)$$

$$\Phi_{15} = (X + Y) \cdot (\cos X - \sin Y) / (\cos Y - \sin X)$$

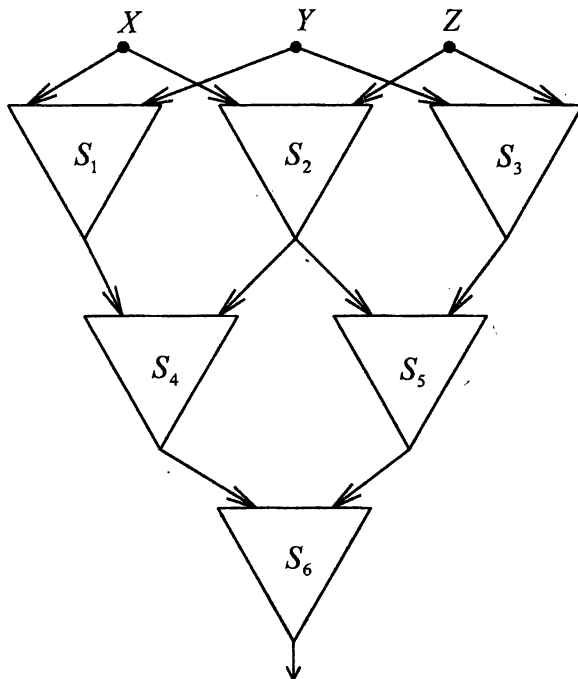
$$\Phi_{16} = X^6 + \ln(X^3 - Y^3)$$

4. Схема Σ из функциональных элементов имеет структуру, изображенную на рисунке. Элементы $S_1 - S_6$ реализуют двуместные функции, которые определяются двузначными двоичными числами,

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
a_9a_{10}	$a_{11}a_{12}$	$a_{13}a_{14}$	$a_{15}a_{16}$	$a_{17}a_{18}$	$a_{19}a_{20}$

образованными из знаков $a_9 - a_{20}$, исходя из следующей таблицы:

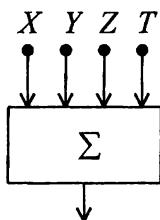
00 + (сложение); 01 – (вычитание);
10 · (умножение); 11 / (деление).



Подставив на место элементов $S_1 - S_6$ конкретные операции, составить формулу для функции, реализуемой схемой Σ .

5. Перевести в десятичную систему двоичное число $a_5a_6a_7a_8$ и прибавить 1. Полученное число i определяет номер схемы Σ_i . Все схемы $\Sigma_1 - \Sigma_{16}$ имеют одинаковую внутреннюю структуру со схемой Σ

и отличаются только присоединением аргументов X, Y, Z, T к 4 входным полюсам. В табл.К5 указано, какие переменные присоединены к входным полюсам 1,2,3,4 в схеме Σ_i . Порядок в схеме $\Sigma - X, Y, Z, T$. Определить, какую функцию реализует схема Σ_i , если схема Σ реализует функцию $(X - Y)/(Z + T)$.



	Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5	Σ_6	Σ_7	Σ_8	Σ_9	Σ_{10}	Σ_{11}	Σ_{12}	Σ_{13}	Σ_{14}	Σ_{15}	Σ_{16}
1	Y	Z	Z	T	Z	Z	Y	Y	T	T	Y	Y	T	T	X	Z
2	Z	X	T	X	T	X	T	T	Z	Z	Z	X	Z	Y	Z	X
3	X	T	X	T	X	Y	Y	X	T	Y	Y	T	X	X	Y	X
4	T	Y	Z	Y	Y	T	X	Z	Y	X	X	Z	Z	Z	Y	Y

Табл. К5.

6. Перевести в десятичную систему двоичное число $a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}a_{36}$ и прибавить 1. Если результат превышает 24, вычесть из него 17. Полученное число i определяет номер функции g_i в табл.К3. Для функции g_i выполнить разложение по переменной X , представляя функции от остальных переменных Y, Z , участвующие в разложении, формулами.

7. Перевести в десятичную систему двоичное число $a_{29}a_{30}a_{31}a_{32}$ и прибавить 1. Если результат превышает 12, вычесть из него 7. Полученное число i определяет номер функции h_i в табл.К4. Для функции h_i выполнить разложение по двум переменным X, Y , представляя функции от остальных переменных Z, T , участвующие в разложении, формулами.

8. Заполнить таблицу К6, вычисляя последовательно значения

булевых функций в столбцах $A-E$ по заданным формулам с параметрами a_1-a_8 . Предварительно запишите элементарные конъюнкции A и C и дизъюнкции B с использованием, где необходимо, знака отрицания в соответствии со значениями a_1-a_8 . Для результирующей функции

$$E = X^{a_1} \cdot Y^{a_2} \cdot Z^{a_3} \oplus ((X^{a_4} \vee Y^{a_5}) \rightarrow X^{a_6} \cdot Y^{a_7} \cdot Z^{a_8})$$

построить СДНФ и изображение функции $E(X,Y,Z)$ на 3-мерном единичном кубе.

X	Y	Z	A	B	C	D	E
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

$$A = X^{a_1} \cdot Y^{a_2} \cdot Z^{a_3}$$

$$B = X^{a_4} \vee Y^{a_5}$$

$$C = X^{a_6} \cdot Y^{a_7} \cdot Z^{a_8}$$

$$D = B \rightarrow C$$

$$E = A \oplus D$$

(Например, если $a_1 = 0$,

$a_2 = 1$, $a_3 = 0$, то

$$X^{a_1} \cdot Y^{a_2} \cdot Z^{a_3} = \bar{X} \cdot Y \cdot \bar{Z})$$

Табл. К6.

9. Заполните таблицу К7, вычисляя последовательно значения булевых функций в столбцах $F-M$ по заданным формулам с параметрами $a_{11}-a_{22}$. Предварительно запишите элементарные конъюнкции F, G, H, J, K и дизъюнкции I, L с использованием, где необходимо, знака отрицания в соответствии со значениями $a_{11}-a_{22}$. Для результирующей функции

$$M = (X^{a_{11}} \cdot Y^{a_{12}} \vee Y^{a_{13}} \cdot Z^{a_{14}} \vee Z^{a_{15}} \cdot X^{a_{16}}) \rightarrow$$

$$\rightarrow (X^{a_{17}} \cdot Y^{a_{18}} \cdot Z^{a_{19}} \vee X^{a_{20}} \cdot Y^{a_{21}} \cdot Z^{a_{22}})$$

построить СДНФ и изображение функции $M(X,Y,Z)$ на 3-мерном единичном кубе.

X	Y	Z	F	G	H	I	J	K	L	M
0	0	0								
0	0	1								
0	1	0								
0	1	1								
1	0	0								
1	0	1								
1	1	0								
1	1	1								

Табл. К7.

$$F = X^{a_{11}} \cdot Y^{a_{12}}$$

$$G = Y^{a_{13}} \cdot Z^{a_{14}}$$

$$H = Z^{a_{15}} \cdot X^{a_{16}}$$

$$I = F \vee G \vee H$$

$$J = X^{a_{17}} \cdot Y^{a_{18}} \cdot Z^{a_{19}}$$

$$K = X^{a_{20}} \cdot Y^{a_{21}} \cdot Z^{a_{22}}$$

$$L = J \vee K$$

$$M = I \rightarrow L$$

10. Представить многочленом Жегалкина функции, заданные ДНФ:

а) $X^{a_{23}} \cdot Y^{a_{24}} \cdot Z^{a_{25}} \vee Y^{a_{26}} \cdot Z^{a_{27}}$,

б) $X^{a_{28}} \vee Y^{a_{29}} \vee Z^{a_{30}}$.

11. Перевести в десятичную систему двоичное число $a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}$ и прибавить 1. Полученное число i определяет номер предиката $P_i(X, Y)$ и значения $\{X\}$ и $\{Y\}$. Заполнив таблицу К8, найти область истинности предиката $P_i(X, Y)$.

$X:$	X_1	X_2	X_3	X_4
$Y:$				
Y_1				
Y_2				
Y_3				

Табл. К8.

1) $P(X, Y) : \max(X, Y)$ – четное число; $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{0, 2, 3\}$.

2) $P(X, Y) : \max(X, Y)$ – нечетное число; $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{0, 2, 3\}$.

3) $P(X, Y) : \min(X, Y)$ – четное число; $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{0, 2, 3\}$.

4) $P(X, Y) : \min(X, Y)$ – нечетное число; $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{0, 2, 3\}$.

- 5) $P(X, Y) : \max(X, Y) - \text{четное число}; X = \{3, 4, 5, 6\}, Y = \{2, 3, 4\}.$
- 6) $P(X, Y) : \max(X, Y) - \text{нечетное число}; X = \{3, 4, 5, 6\}, Y = \{2, 3, 4\}.$
- 7) $P(X, Y) : \max(X, Y) - \text{четное число}; X = \{3, 4, 5, 6\}, Y = \{2, 4, 5\}.$
- 8) $P(X, Y) : \max(X, Y) - \text{нечетное число}; X = \{3, 4, 5, 6\}, Y = \{2, 4, 5\}.$
- 9) $P(X, Y) : \max(X, Y) - \text{четное число}; X = \{2, 3, 4, 5\}, Y = \{2, 4, 5\}.$
- 10) $P(X, Y) : \max(X, Y) - \text{нечетное число}; X = \{2, 3, 4, 5\}, Y = \{2, 4, 5\}.$
- 11) $P(X, Y) : \max(X, Y) - \text{четное число}; X = \{2, 3, 4, 5\}, Y = \{3, 4, 5\}.$
- 12) $P(X, Y) : \max(X, Y) - \text{нечетное число}; X = \{2, 3, 4, 5\}, Y = \{3, 4, 5\}.$
- 13) $P(X, Y) : (X - Y) - \text{четное число}; X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{0, 2, 3\}.$
- 14) $P(X, Y) : (X - Y) - \text{нечетное число}; X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{0, 2, 3\}.$
- 15) $P(X, Y) : \min(X, Y) - \text{четное число}; X = \{2, 5, 6, 8\}, Y = \{3, 6, 9\}.$
- 16) $P(X, Y) : \min(X, Y) - \text{нечетное число}; X = \{2, 5, 6, 8\}, Y = \{3, 6, 9\}.$

12. Заполнить 15 числами $a_{\Phi+1} - a_{\Phi+15}$ таблицу К9, представляющую двуместный предикат $P(X, Y)$. Определить значения высказываний:

- (1) $\forall X \exists Y (P(X, Y) = 1)$
- (2) $\forall Y \exists X (P(X, Y) = 1)$
- (3) $\exists X \forall Y (P(X, Y) = 1)$
- (4) $\exists Y \forall X (P(X, Y) = 1)$

$X:$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
$Y:$					
Y_1	$a_{\Phi+1}$	$a_{\Phi+2}$	$a_{\Phi+3}$	$a_{\Phi+4}$	$a_{\Phi+5}$
Y_2	$a_{\Phi+6}$	$a_{\Phi+7}$	$a_{\Phi+8}$	$a_{\Phi+9}$	$a_{\Phi+10}$
Y_3	$a_{\Phi+11}$	$a_{\Phi+12}$	$a_{\Phi+13}$	$a_{\Phi+14}$	$a_{\Phi+15}$

Табл. К9.

ТРЕНИНГ УМЕНИЙ

1. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 1

Задание

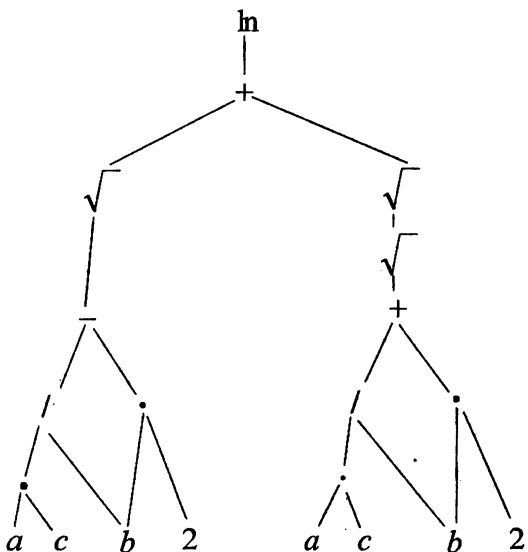
Определение порядка действий при вычислении значения суперпозиции элементарных функций и простых многоместных функций. Построение схемы из функциональных элементов, реализующей функцию

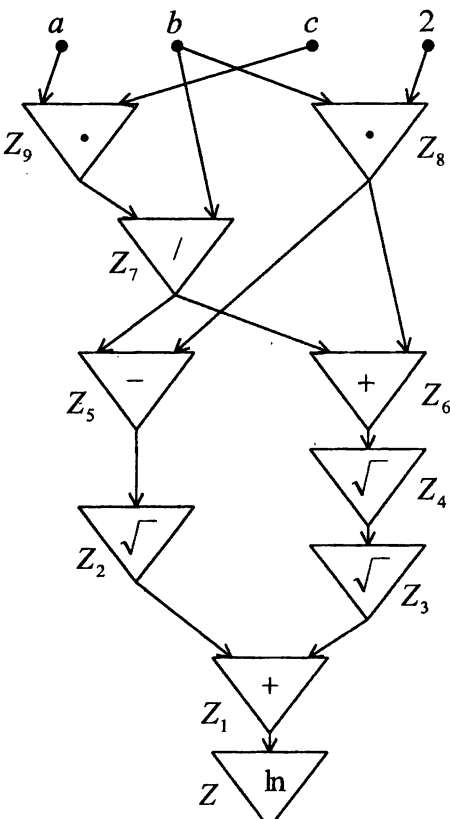
$$Z = \ln \left(\sqrt{\frac{ac}{b} - 2b} + \sqrt[4]{\frac{ac}{b} + 2b} \right)$$

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное содержание.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму
1	Составить иерархическую схему последовательности действий. а) Определить состав переменных и констант в формуле, которая задает функцию б) Определить внешнюю операцию (функцию) и основные подформулы г) Определить, какие из функций, составляющих суперпозицию являются одноместными, а какие – двуместными	Переменные a, b, c; константа 2. $Z = \ln Z_1$, где $Z_1 = Z_2 + Z_3$; $Z_2 = \sqrt{\frac{ac}{b} - 2b}$; $Z_3 = \sqrt[4]{\frac{ac}{b} + 2b}$. Операции $\ln, \sqrt{\quad}$ – одноместные; арифметические операции $+, -, \cdot, /$ – двуместные; операция $\sqrt[4]{\quad}$ является суперпозицией: $\sqrt[4]{d} = \sqrt{\sqrt{d}}$.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму
		Иерархическая схема, определяющая порядок действий, строится, начиная с внешних операций: 
2	Построить схему из функциональных элементов в соответствии с иерархической схемой вычисления. а) Определить совокупность используемых элементов с одним и двумя входами	Формулы расчета промежуточных результатов, определяющие состав функциональных элементов $Z, Z_1 - Z_9$: $Z_2 = \sqrt{Z_5} \qquad Z_3 = \sqrt{Z_4}$ $Z_4 = \sqrt{Z_6}$ $Z_5 = Z_7 - Z_8 \qquad Z_6 = Z_7 + Z_8$ $Z_7 = Z_9 / b$ $Z_8 = b \cdot 2$ $Z_9 = a \cdot c$

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму
	б) Выделить подформулы, имеющие в суперпозиции больше одного вхождения в) Осуществить необходимое соединение элементов	Подформулы $Z_7 = a \cdot c / b$ и $Z_8 = 2 \cdot b$. Схема из функциональных элементов строится, начиная с независимых переменных и констант; элементы, вычисляющие промежуточные результаты, участвующие в суперпозиции несколько раз, не дублируются; их выходные значения разветвляются и присоединяются к входам нескольких элементов следующего уровня. 

Решите самостоятельно следующие задачи:
 Построить схемы из функциональных элементов, реализующие функции:

1. $\min (\max (X / Z, X - Y), X / Z - Y \cdot Z)$

2. $\max (X + 2Y, 2Z) / \ln (X - Y)$

3. $2^{X - \ln(Y + Z) / (X - Z)}$

4. $(X - Y / Z^2) \cdot \sin(3Y^2 - X)$

5. $X^3 - \sqrt{2^{3-Y}}$

6. $3^{X-Y} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^3(3-Y)}$

2. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 2

Задание

Построить таблицу истинности для булевой функции, заданной логической формулой $f(X, Y, Z) = (X \rightarrow \bar{Z}) \oplus \bar{X} \cdot Y$. Произвести разложение функции по переменной X .

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное содержание.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму
1	Определить n – число переменных	Функция f зависит от 3 переменных; следовательно, $n = 3$
2	Используя умение 1, построить иерархическую систему подформул, определив последовательность булевых операций	<pre> graph TD A["⊕"] --> B["→"] A --> C["&"] B --> D["X"] B --> E["¬"] E --> F["Z"] C --> G["¬"] G --> H["X"] C --> I["Y"] </pre>

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму																																																																
3	Построить таблицу на- боров значений n переменных в лекси- ко-графическом по- рядке	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td colspan="3"></td><td>$\neg(3)$</td><td>$(1) \rightarrow (4)$</td><td>$\neg(1)$</td><td>$(6) \& (2)$</td><td>$(5) \oplus (7)$</td></tr><tr><td>X</td><td>Y</td><td>Z</td><td>$\neg Z$</td><td>$X \rightarrow \neg Z$</td><td>$\neg X$</td><td>$\neg X \& Y$</td><td>$(X \rightarrow Z) \oplus \neg X \& Y$</td></tr></table>	1	2	3	4	5	6	7	8				$\neg(3)$	$(1) \rightarrow (4)$	$\neg(1)$	$(6) \& (2)$	$(5) \oplus (7)$	X	Y	Z	$\neg Z$	$X \rightarrow \neg Z$	$\neg X$	$\neg X \& Y$	$(X \rightarrow Z) \oplus \neg X \& Y$																																								
1	2	3	4	5	6	7	8																																																											
			$\neg(3)$	$(1) \rightarrow (4)$	$\neg(1)$	$(6) \& (2)$	$(5) \oplus (7)$																																																											
X	Y	Z	$\neg Z$	$X \rightarrow \neg Z$	$\neg X$	$\neg X \& Y$	$(X \rightarrow Z) \oplus \neg X \& Y$																																																											
4	Присоединить к ней справа столбцы для вычисления значе- ний промежуточных функций, выражае- мых подформулами, в последовательности, о п р е д е л я е м о й иерархической схе- мой	<table><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1																																																											
0	0	1	0	1	1	0	1																																																											
0	1	0	1	1	1	1	0																																																											
0	1	1	0	1	1	1	0																																																											
1	0	0	1	1	0	0	1																																																											
1	0	1	0	0	0	0	0																																																											
1	1	0	1	1	0	0	1																																																											
1	1	1	0	0	0	0	0																																																											
5	Последовательно для каждой строки табли- цы вычислять значе- ния промежуточных функций, начиная с внутренних, пользу- ясь таблицами истин- ности основных логи- ческих функций	Столбцы (4) и (6) заполняются непосред- ственно как отрицания столбцов (3) и (1). Столбец (5) заполняется, исходя из столб- цов (1) и (4) по формуле импликации $(X \rightarrow \neg Z)$ (следует помнить, что имплика- ция – некоммутативная операция); столбец (7) – из (6) и (2) по формуле коммутативной операции конъюнкции. Наконец, результи- рующий столбец (8) рассчитывается с помо- щью операции $\oplus$, исходя из столбцов (5) и (7).																																																																
6	Произвести разложе- ние функции по пер- вой переменной	Функцию f можно записать в виде $f = \neg X[1100]^T \vee X[1010]^T.$ Пользуясь таблицей (см. файл материалов), можно записать формулу для f : $f = \bar{X} \cdot \bar{Y} \vee X \cdot \bar{Z}$																																																																

Решите самостоятельно следующие задачи:

Построить таблицу истинности для функции, заданной формулой.
Провести разложение функции по переменной X .

1. $(X \rightarrow \bar{Z}) \sim (Y \rightarrow Z)$

2. $(X \oplus Y) \vee (Z \rightarrow X)$

3. $(\bar{X} \vee Z) \oplus Y \cdot \bar{Z}$

4. $(X \sim \bar{Y}) \rightarrow (Z \oplus X)$

5. $(\bar{X} \cdot Z) \sim (Y \rightarrow Z)$

6. $(\bar{X} \sim Y \cdot Z) \& (Z \rightarrow \bar{Y})$

3. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 3

Задание

Построить совершенную дизъюнктивную форму (СДНФ) для булевой функции $f(X, Y, Z, T)$, заданную кортежем $[0, 2, 3, 7, 10, 11, 12]^T$.

Произвести разложение функции f по переменным X, Y . Упростить формулу, используя основные свойства булевых функций и приемы поглощения и склеивания.

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное содержание.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму
1	Используя построение умения 2, выполнить табличное представление функции f по заданному кортежу	$f(X, Y, Z, T)$ – функция 4 переменных. Таблица истинности состоит из 16 строк. Заполняем столбец значений функции f : записываем 1 в строках, десятичные номера которых соответствуют 4-значным двоичным числам – наборам значений переменных X, Y, Z, T

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму																																																																																																						
2	Для каждой строки таблицы истинности, в которой значение функции f равно 1, составить соответствующую ей элементарную конъюнкцию 4 переменных	<table><tr><th>X</th><th>Y</th><th>Z</th><th>T</th><th>$f(X, Y, Z, T)$</th><th>Элем. &</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>$\bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z} \cdot \bar{T}$</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>$\bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot Z \cdot \bar{T}$</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>$\bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot Z \cdot T$</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>$\bar{X} \cdot Y \cdot Z \cdot T$</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>$X \cdot \bar{Y} \cdot Z \cdot \bar{T}$</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>$X \cdot \bar{Y} \cdot Z \cdot T$</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>$X \cdot Y \cdot \bar{Z} \cdot \bar{T}$</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td></td></tr></table>	X	Y	Z	T	$f(X, Y, Z, T)$	Элем. &	0	0	0	0	1	$\bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z} \cdot \bar{T}$	0	0	0	1	0		0	0	1	0	1	$\bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot Z \cdot \bar{T}$	0	0	1	1	1	$\bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot Z \cdot T$	0	1	0	0	0		0	1	0	1	0		0	1	1	0	0		0	1	1	1	1	$\bar{X} \cdot Y \cdot Z \cdot T$	1	0	0	0	0		1	0	0	1	0		1	0	1	0	1	$X \cdot \bar{Y} \cdot Z \cdot \bar{T}$	1	0	1	1	1	$X \cdot \bar{Y} \cdot Z \cdot T$	1	1	0	0	1	$X \cdot Y \cdot \bar{Z} \cdot \bar{T}$	1	1	0	1	0		1	1	1	0	0		1	1	1	1	0	
X	Y	Z	T	$f(X, Y, Z, T)$	Элем. &																																																																																																			
0	0	0	0	1	$\bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z} \cdot \bar{T}$																																																																																																			
0	0	0	1	0																																																																																																				
0	0	1	0	1	$\bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot Z \cdot \bar{T}$																																																																																																			
0	0	1	1	1	$\bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot Z \cdot T$																																																																																																			
0	1	0	0	0																																																																																																				
0	1	0	1	0																																																																																																				
0	1	1	0	0																																																																																																				
0	1	1	1	1	$\bar{X} \cdot Y \cdot Z \cdot T$																																																																																																			
1	0	0	0	0																																																																																																				
1	0	0	1	0																																																																																																				
1	0	1	0	1	$X \cdot \bar{Y} \cdot Z \cdot \bar{T}$																																																																																																			
1	0	1	1	1	$X \cdot \bar{Y} \cdot Z \cdot T$																																																																																																			
1	1	0	0	1	$X \cdot Y \cdot \bar{Z} \cdot \bar{T}$																																																																																																			
1	1	0	1	0																																																																																																				
1	1	1	0	0																																																																																																				
1	1	1	1	0																																																																																																				
3	Записать формулу СДНФ, объединив все конъюнкции знаками дизъюнкции	В столбце значений функции 7 единиц. Следовательно, СДНФ есть дизъюнкция 7 конъюнкций. $f = \underset{(1)}{\bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z} \cdot \bar{T}} \vee \underset{(2)}{\bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot Z \cdot \bar{T}} \vee \underset{(3)}{\bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot Z \cdot T} \vee$ $\underset{(4)}{\bar{X} \cdot Y \cdot Z \cdot T} \vee \underset{(5)}{X \cdot \bar{Y} \cdot Z \cdot \bar{T}} \vee \underset{(6)}{X \cdot \bar{Y} \cdot Z \cdot T} \vee$ $\underset{(7)}{X \cdot Y \cdot \bar{Z} \cdot \bar{T}}$ Дизъюнктивные члены пронумерованы – эти обозначения будут в дальнейшем использоваться. Следует проверить, что все конъюнкции имеют длину (количество сомножителей), равную числу переменных, а число слагаемых в дизъюнкции равно числу единиц в наборе значений функции																																																																																																						

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму
4	Составить разложение функции f по двум первым переменным	Общий вид разложения функции 4 переменных по двум первым переменным: $f(X,Y,Z,T) = \bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot f(0,0,Z,T) \vee \bar{X} \cdot Y \cdot f(0,1,Z,T) \vee X \cdot \bar{Y} \cdot f(1,0,Z,T) \vee X \cdot Y \cdot f(1,1,Z,T).$ Пользуясь таблицей истинности функции f, запишем разложение по X, Y, задавая функции переменных Z, T столбцами значений: $f = \bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot [1011]^T \vee \bar{X} \cdot Y \cdot [0001]^T \vee X \cdot \bar{Y} \cdot [0011]^T \vee X \cdot Y \cdot [1000]^T.$ Функции оставшихся переменных Z, T, заданные 4 столбцами значений, можно записать формулами, используя таблицу из файла материалов: $f = \bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot (T \rightarrow Z) \vee \bar{X} \cdot Y \cdot Z \cdot T \vee X \cdot \bar{Y} \cdot Z \vee XY(\bar{Z} \vee \bar{T})$
5	Упростить формулу, используя основные эквивалентности и приемы поглощения и склеивания	Будем исходить из СДНФ. Объединим некоторые пары элементарных конъюнкций и вынесем за скобки общие множители: а) (3) и (4): $\bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot Z \cdot T \vee \bar{X} \cdot Y \cdot Z \cdot T = \bar{X} \cdot Z \cdot T(\bar{Y} \vee Y) =$ [последний множитель тождественно равен 1] $= \bar{X} \cdot Z \cdot T$. Обозначим полученную конъюнкцию (8) б) (5) и (6): $X \cdot \bar{Y} \cdot Z \cdot \bar{T} \vee X \cdot \bar{Y} \cdot Z \cdot T = X \cdot \bar{Y} \cdot Z \cdot (\bar{T} \vee T) = X \cdot \bar{Y} \cdot Z$. в) (1) и (7): $\bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z} \cdot \bar{T} \vee X \cdot Y \cdot \bar{Z} \cdot \bar{T} = \bar{Z} \cdot \bar{T} \cdot (\bar{X} \cdot \bar{Y} \vee X \cdot Y) = \bar{Z} \cdot \bar{T} \cdot (X \sim Y)$.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму
		г) (2) и (8): $\bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot Z \cdot \bar{T} \vee \bar{X} \cdot Z \cdot T =$ $= \bar{X} \cdot Z (\bar{Y} \cdot \bar{T} \vee T) =$ [применяя склеивание] $= \bar{X} \cdot Z \cdot (\bar{Y} \vee T).$ В результате получаем формулу $f = \bar{X} \cdot Z \cdot (\bar{Y} \vee T) \vee X \cdot \bar{Y} \cdot Z \vee \bar{Z} \cdot \bar{T} \cdot (X \sim Y).$ Формула содержит 11 символов переменных, связанных 15 знаками операций (из них 5 отрицаний). Первоначальная формула (СДНФ) содержит 28 символов переменных и 42 знака операций: 15 отрицаний, 21 конъюнкцию, 6 дизъюнкций

Решите самостоятельно следующие задачи:

Построить СДНФ для функции $f(X, Y, Z, T)$, заданной кортежем.

Произвести разложение функции f по переменным X, Y . Упростить полученную формулу.

1. $[0, 3, 4, 6, 9, 11, 14]^T$
2. $[1, 3, 5, 6, 8, 10, 13]^T$
3. $[2, 4, 5, 7, 8, 11, 13]^T$
4. $[2, 3, 6, 8, 9, 12, 15]^T$
5. $[1, 4, 5, 6, 8, 10, 14]^T$

4. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 4

Задание

Булеву функцию $f = X \cdot \bar{Y} \vee Y \cdot Z \vee \bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z}$ выразить многочленом

Жегалкина. Проверить принадлежность функции f классу L линейных функций.

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное содержание.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму
1	Построить многочлен Жегалкина. а) заменить подформулы, использующие $\vee$, их выражениями в базисе Жегалкина, т.е. через $\&, \oplus, \neg$	а) Сначала выделим дизъюнкцию двух пер- вых членов: $f_1 = X \cdot \bar{Y} \vee Y \cdot Z$. Преобразуем f_1, применяя выражение дизъюнкции в ба- зисе Жегалкина: $A \vee B = A \oplus B \oplus A \cdot B$, не заменяя пока $\bar{Y}$ на $(Y \oplus 1)$ $f_1 = X \cdot \bar{Y} \oplus Y \cdot Z \oplus X \cdot \bar{Y} \cdot Y \cdot Z.$ Если сомножители A и B содержат общие переменные, то произведение $A \cdot B$ следу- ет упростить, используя равенства: $T \cdot T = T, \bar{T} \cdot \bar{T} = \bar{T}, T \cdot \bar{T} = 0.$ В нашем примере последнее слагаемое тож- дественно равно 0, так как содержит одно- временно $\bar{Y}$ и Y. Таким образом, $f_1 = X \cdot \bar{Y} \oplus Y \cdot Z$ б) Поскольку $f = f_1 \vee \bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z}$, выразим те- перь эту дизъюнкцию в базисе Жегалкина: $f = f_1 \oplus \bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z} \oplus f_1 \cdot (\bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z}) =$ $= X \cdot \bar{Y} \oplus Y \cdot Z \oplus \bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z} \oplus (X \cdot \bar{Y} \oplus$ $\oplus Y \cdot Z) \cdot \bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z} = [\text{раскрываем скобки в}$ последнем слагаемом] $= X \cdot \bar{Y} \oplus Y \cdot Z \oplus$ $\oplus \bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z} \oplus X \cdot \bar{Y} \cdot \bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z} \oplus Y \cdot Z \cdot \bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z}$ Два последних слагаемых тождественно равны 0, так как содержат переменную и ее отрицание (в первом – Y, во втором – Z) Таким образом, $f = X \cdot \bar{Y} \oplus Y \cdot Z \oplus \bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z}$

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму
	б) раскрыть скобки по правилу перемножения многочленов в) сократить пары равных слагаемых и упорядочить оставшиеся члены, в первую очередь, по их степеням, а внутри – в алфавитном порядке переменных	в) Теперь заменяем знак отрицания: каждый член $\bar{A}$ на $(A \oplus 1)$ $f = X \cdot (Y \oplus 1) \oplus Y \cdot Z \oplus (X \oplus 1) \cdot (Y \oplus 1) \cdot (Z \oplus 1)$ $f = X \cdot Y \oplus X \oplus Y \cdot Z \oplus X \cdot Y \cdot Z \oplus X \cdot Y \oplus X \cdot Z \oplus Y \cdot Z \oplus X \oplus Y \oplus Z \oplus 1$ После сокращений $A \oplus A = 0$ получаем: $f = X \cdot Y \cdot Z \oplus X \cdot Z \oplus Y \oplus Z \oplus 1$
2	Проверить принадлежность функции f классу L линейных функций	Определить слагаемое наибольшей степени: если степени всех слагаемых не превышают 1 (т.е. формула не содержит конъюнций; все слагаемые – переменные или константа 1), то функция линейна. Для функции f – старшая степень слагаемого равна 3; следовательно, функция – нелинейная

Решите самостоятельно следующие задачи:

Преобразовать формулы в многочлен Жегалкина.

1. $X \cdot \bar{Y} \cdot Z \rightarrow \bar{X} \cdot Y$

2. $X \vee \bar{Y} \vee Z$

3. $\bar{X} \cdot Y \cdot Z \vee \bar{Y} \cdot \bar{Z}$

4. $\bar{X} \cdot Y \vee X \cdot \bar{Z}$

5. $(Y \rightarrow Z) \vee X \cdot Z$

5. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 5

Задание 1

Определить область истинности I_P предиката $P(X, Y)$:
 “ $((X + Y) - \text{нечетно}) \& (|X - Y| \leq 1)$ ”, где $X = \{5, 8, 9\}$, $Y = \{4, 7, 8, 10\}$.

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное содержание.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму																						
1	Построить прямоугольную таблицу размерности $m \times n$, где m и n – число допустимых значений соответственно первого и второго переменного. Отметить недопустимые пары значений	Строится таблица 3×4 . Предметная область состоит из 12 пар (X, Y)																						
2	В каждую клетку таблицы, соответствующую допустимой паре (X, Y) , вписать 0 или 1 в зависимости от вычисленного значения предиката $P(X, Y)$	Предикат $P(X, Y)$ является конъюнкцией двух предикатов: $P(X, Y) = P_1(X, Y) \& P_2(X, Y)$, где $P_1(X, Y) : (X + Y) - \text{нечетно};$ $P_2(X, Y) : X + Y \leq 1$ Область истинности строится сначала отдельно для предиката P_1 (прямоугольная таблица А) и P_2 (таблица В). 1) А: <table><tr><td></td><td>Y:</td><td>4</td><td>7</td><td>8</td><td>10</td></tr><tr><td rowspan="3">X</td><td>5</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>8</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>9</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr></table> Значение 1 соответствует тем парам (X, Y),		Y:	4	7	8	10	X	5	1	0	1	1	8	0	1	0	0	9	1	0	1	1
	Y:	4	7	8	10																			
X	5	1	0	1	1																			
	8	0	1	0	0																			
	9	1	0	1	1																			

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму
		сумма компонент которых нечетна, т.е. когда X и Y – разной четности. Так, $P_1(5,7) = 0$, $P_1(9,8) = 1$. 2) В: $X \begin{cases} 5 & \begin{matrix} Y: 4 & 7 & 8 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \\ 8 \\ 9 \end{cases}$ Значение 1 соответствует тем парам (X, Y), компоненты которых различаются не больше, чем на 1. Так, $P_2(9,4) = 0$, $P_2(8,7) = 1$. 3) Определяем матрицу C, элементы которой суть конъюнкции соответствующих элементов матриц A и B: $c_{ij} = a_{ij} \& b_{ij}$ C: $X \begin{cases} 5 & \begin{matrix} Y: 4 & 7 & 8 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \\ 8 \\ 9 \end{cases}$ Матрица C наглядно представляет область истинности I_P предиката $P(X, Y)$; можно задать ее и перечислением пар $(X, Y) : \{(5,4), (8,7), (9,8), (9,10)\}$

Задание 2

Проверить истинность заданной предикатной формулы, содержащей двуместный предикат $P(X, Y)$ с конечной предметной областью, обе переменные которого связаны кванторами.

Предикат $P(X, Y)$ задан следующей таблицей.

		Y: 1	2	3	4	5	6
X {	1	0	1	1	0	0	1
	2	1	0	1	0	0	1
	3	0	0	1	0	1	0
	4	1	0	1	1	0	1

Определить значения высказываний (0-местных предикатов):

$$(1) \forall X \forall Y P(X, Y)$$

$$(2) \forall X \exists Y P(X, Y)$$

$$(3) \exists X \forall Y P(X, Y)$$

$$(4) \exists X \exists Y P(X, Y)$$

$$(5) \forall Y \exists X P(X, Y)$$

$$(6) \exists Y \forall X P(X, Y)$$

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное содержание.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму
1	Если в заданной формуле оба квантора – одинаковые, то для истинности формулы в таблице должны содержаться: для квантора $\forall$ – только единицы, для квантора $\exists$ – хотя бы одна единица	Для истинности высказывания (1) таблица должна состоять только из единиц. Поэтому (1) ложное высказывание, т.е. $\forall X \forall Y P(X, Y) = 0$. Для истинности высказывания (4) таблица должна содержать хотя бы одну единицу. Следовательно, (4) – истинное высказывание: $\exists X \exists Y P(X, Y) = 1$
2	Если в заданной формуле кванторы различны, то а) если внутренний квантор – $\forall$, то для истинности формулы в таблице должен существовать ряд из единиц, соответствующий переменной, связанной внешним квантором б) если внутренний	В формулах (3) и (6) внутренний квантор – $\forall$. Для истинности высказывания (3) необходимо наличие строки из единиц; такой строки в матрице нет: поэтому $\exists X \forall Y P(X, Y) = 0$. Для истинности высказывания (6) необходимо наличие столбца из единиц, – такой столбец есть (для $Y = 3$); следовательно, $\exists Y \forall X P(X, Y) = 1$. В формулах (2) и (5) внутренний квантор –

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму
	квантор $\exists$, то для истинности формулы в каждом ряду таблицы, соответствующем переменной, связанной внешним квантором, должна присутствовать хотя бы одна единица	$\exists$. Для истинности высказывания (2) необходимо наличие единицы в каждой строке: это условие выполнено, поэтому $\forall X \exists Y P(X, Y) = 1$. Для истинности высказывания (5) необходимо наличие единицы в каждом столбце; следовательно, $\forall Y \exists X P(X, Y) = 1$

Решите самостоятельно следующие задачи:

I. Найти область истинности предиката $P(X, Y)$, заданного, предикатной формулой.

1. $P(X, Y) = ((X, Y) - \text{нечетно}) \& (\max(X, Y) - \text{нечетно})$, где

$$X = \{2, 5, 6, 8\},$$

$$Y = \{3, 6, 9\}.$$

2. $P(X, Y) = ((X - Y) \text{ делится на } 3) \rightarrow (X + Y > 6)$, где

$$X = \{1, 4, 5, 6\},$$

$$Y = \{2, 3, 4\}.$$

3. $P(X, Y) = ((X + Y) - \text{нечетно}) \vee ((X - Y) \text{ делится на } 3)$, где

$$X = \{1, 3, 6, 7\},$$

$$Y = \{2, 4, 5\}.$$

II. Определить истинность высказываний.

$$1. \exists X \forall Y P(X, Y) \qquad \exists X \forall Y Q(X, Y)$$

$$\exists Y \forall X P(X, Y) \qquad \exists Y \forall X Q(X, Y)$$

$$\forall X \exists Y P(X, Y) \qquad \forall X \exists Y Q(X, Y)$$

$$\forall Y \exists X P(X, Y) \qquad \forall Y \exists X Q(X, Y)$$

где $P(X, Y)$ и $Q(X, Y)$ заданы таблицами:

а) $P(X,Y):$

	$X:$			
	0	1	0	1
$Y:$	1	0	0	1
	1	0	1	1

$Q(X,Y):$

	$X:$			
	0	1	0	1
$Y:$	1	0	0	1
	1	0	1	1

б) $P(X,Y):$

	$X:$			
	0	1	0	1
$Y:$	1	0	0	1
	1	0	1	1

$Q(X,Y):$

	$X:$			
	0	1	0	1
$Y:$	1	0	0	1
	1	0	1	1

2. $\exists X \exists Y P(X,Y)$

$\forall X \forall Y Q(X,Y)$

$\exists X \exists Y (P(X,Y) \& Q(X,Y))$

$\forall X \forall Y (P(X,Y) \vee Q(X,Y))$

где $P(X,Y)$ и $Q(X,Y)$ заданы таблицами:

а) $P(X,Y):$

	$X:$			
	0	1	1	1
$Y:$	0	1	0	1
	1	1	0	0

$Q(X,Y):$

	$X:$			
	1	0	0	0
$Y:$	1	0	1	0
	0	0	1	1

б) $P(X,Y):$

	$X:$			
	0	0	0	0
$Y:$	0	1	0	1
	1	1	1	0

$Q(X,Y):$

	$X:$			
	1	1	1	1
$Y:$	1	0	1	0
	0	0	0	1

3. $\exists X \forall Y P(X,Y)$

$\exists Y \forall X Q(X,Y)$

$\forall X \exists Y (P(X,Y) \& Q(X,Y))$

$\forall Y \exists X (P(X,Y) \vee Q(X,Y))$

$\exists Y \forall X (P(X,Y) \& Q(X,Y))$

$\exists X \forall Y (P(X,Y) \vee Q(X,Y))$

где $P(X,Y)$ и $Q(X,Y)$ заданы таблицами:

$P(X,Y):$

	$X:$			
$Y:$	0	1	1	0
	1	0	1	0
	1	0	0	1

$Q(X,Y):$

	$X:$			
$Y:$	1	0	0	1
	0	1	0	1
	0	1	1	0

ФАЙЛ МАТЕРИАЛОВ

1. Изоморфизм алгебр

Для алгебр $A = (M; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$ и $B = (N; \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k)$ – взаимно однозначное соответствие Γ между множествами M и N и операциями φ_i, ψ_i при котором выполнено:

$$\Gamma(\varphi_i(m)) = \psi_i(\Gamma(m)) \text{ для всех } m, \varphi_i, \psi_i.$$

2. Основные свойства элементов булевой алгебры
 $(M; \vee, \wedge, \neg): F, G, H \in M$; $\vee$ – операция сложения, $\wedge$ – операция умножения, $\neg$ – операция дополнения; 0 и 1 – ноль и единица алгебры.

1. $F \vee G = G \vee F$
2. $F \wedge G = G \wedge F$
3. $(F \vee G) \vee H = F \vee (G \vee H)$
4. $(F \wedge G) \wedge H = F \wedge (G \wedge H)$
5. $(F \vee G) \wedge H = (F \wedge H) \vee (G \wedge H)$
6. $(F \wedge G) \vee H = (F \vee H) \wedge (G \vee H)$
7. $F \vee F = F$
8. $F \wedge F = F$
9. $F \vee (F \wedge G) = F$
10. $F \wedge (F \vee G) = F$
11. $\neg(F \vee G) = \neg F \wedge \neg G$
12. $\neg(F \wedge G) = \neg F \vee \neg G$
13. $F \vee \neg F = 1$
14. $F \wedge \neg F = 0$
15. $F \vee 0 = F$
16. $F \wedge 0 = 0$
17. $F \vee 1 = 1$
18. $F \wedge 1 = F$
19. $\neg 1 = 0$
20. $\neg 0 = 1$
21. $\neg(\neg F) = F$

3. Основные соответствия элементов и операций булевых алгебр.

<u>Множества</u>	<u>Логические функции</u>	<u>Случайные события</u>
$\emptyset$	0	невозможное
U (универсальное)	1	достоверное
$\cup$ (объединение)	$\vee$ (дизъюнкция)	сумма
$\cap$ (пересечение)	$\&$ (конъюнкция)	произведение
$\neg$ (дополнение)	$\neg$ (отрицание)	противоположное

4. Булевы функции 2 переменных.

Табл. содержит все булевы функции двух переменных. Функция g_i

имеет в качестве столбца значений двоичную запись числа i . Ниже приведены выражения этих функций формулами (звездочкой * отмечены функции, имеющие одну несущественную переменную, т.е. фактически функций одной переменной; двумя звездочками ** – имеющие две несущественные переменные, т.е. константы).

X	Y	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Табл.

- ** $g_0 = 0$ – константа 0
- $g_1 = X \& Y$ – конъюнкция
- $g_2 = \neg(X \rightarrow Y) = X \& \neg Y$ – отрицание импликации
- * $g_3 = X$ – первая переменная
- $g_4 = \neg(Y \rightarrow X) = \neg X \& Y$ – отрицание обратной импликации
- * $g_5 = Y$ – вторая переменная
- $g_6 = X \oplus Y = \neg X \& Y \vee X \& \neg Y$ – сумма по модулю 2
- $g_7 = X \vee Y$ – дизъюнкция
- $g_8 = \neg(X \& Y) = \neg X \vee \neg Y$ – отрицание конъюнкции
- $g_9 = X \sim Y = \neg X \& \neg Y \vee X \& Y$ – эквивалентность
- * $g_{10} = \neg Y$ – отрицание второй переменной
- $g_{11} = Y \rightarrow X = X \vee \neg Y$ – обратная импликация
- * $g_{12} = \neg X$ – отрицание первой переменной
- $g_{13} = X \rightarrow Y = \neg X \vee Y$ – импликация
- $g_{14} = X | Y = \neg X \vee \neg Y = \neg(X \& Y)$ – штрих Шеффера
- ** $g_{15} = 1$ – константа 1

5. Двоичный 5-мерный куб E^5 .

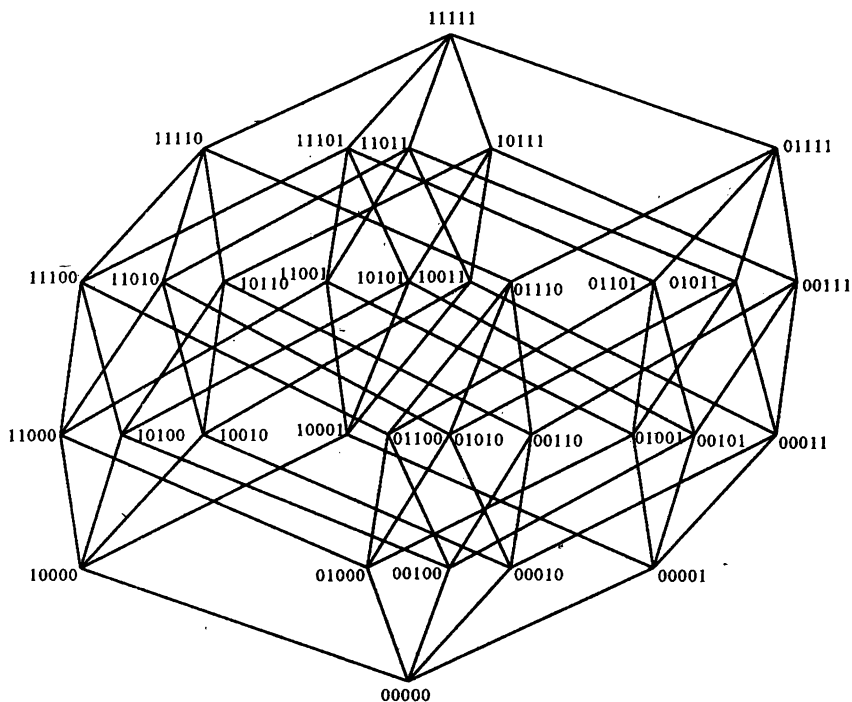


Рис. (E^5)

6. Представления основных булевых функций формулами в некоторых полных системах.

В табл. для 7 функций, перечисленных в 1-й графе, приведены их выражения через функции 6 полных систем. Знаком + отмечены тривиальные представления, поскольку выражаемая функция сама входит в данную систему. Знаком ■ отмечены не включенные в таблицу более громоздкие формулы.

	$\langle \neg, \&, \vee \rangle$	$\langle \neg, \& \rangle$	$\langle \neg, \vee \rangle$	$\langle 1, \&, \oplus \rangle$	$\langle \neg, \rightarrow \rangle$	$\langle X Y \rangle$
$\bar{X}$	+	+	+	$X \oplus 1$	+	$X X$
$X \& Y$	+	+	$\overline{\bar{X} \vee \bar{Y}}$	+	$\overline{X \rightarrow \bar{Y}}$	$(X Y) (X Y)$
$X \vee Y$	+	$\overline{\bar{X} \cdot \bar{Y}}$	+	$X \cdot Y \oplus X \oplus Y$	$\bar{X} \rightarrow Y$	$(X X) (Y Y)$

$\langle \neg, \&, \vee \rangle$	$\langle \neg, \& \rangle$	$\langle \neg, \vee \rangle$	$\langle 1, \&, \oplus \rangle$	$\langle \neg, \rightarrow \rangle$	$\langle X Y \rangle$
$X \rightarrow Y \quad \bar{X} \vee Y$	$\overline{X \cdot \bar{Y}}$	$\bar{X} \vee Y$	$X \cdot Y \oplus X \oplus 1$	$+$	$X (Y Y)$
$X \oplus Y \quad \bar{X} \cdot Y \vee X \cdot \bar{Y}$	$\blacksquare$	$\blacksquare$	$+$	$\blacksquare$	$\blacksquare$
$X \sim Y \quad \bar{X} \cdot \bar{Y} \vee X \cdot Y$	$\blacksquare$	$\blacksquare$	$X \oplus Y \oplus 1$	$\blacksquare$	$\blacksquare$
$X Y \quad \bar{X} \vee \bar{Y} = \overline{X \cdot Y}$	$\overline{X \cdot Y}$	$\bar{X} \vee \bar{Y}$	$X \cdot Y \oplus 1$	$X \rightarrow \bar{Y}$	$+$

7. Принцип двойственности для булевых функций.

Если в формуле F , представляющей функцию f , все знаки функций заменить на знаки двойственных функций, то полученная формула F^* будет представлять функцию f^* , двойственную f .

8. Критерий полноты системы булевых функций (теорема Поста) – система полна в том и только в том случае, если для каждого из классов T_0, T_1, S, L, M в системе существует функция, не принадлежащая этому классу; иначе говоря, система Σ полна, если выполнены 5 условий:

- 1) в системе Σ есть $f_1 \notin T_0$,
- 2) в системе Σ есть $f_2 \notin T_1$
- 3) в системе Σ есть $f_3 \notin S$
- 4) в системе Σ есть $f_4 \notin L$
- 5) в системе Σ есть $f_5 \notin M$.

Функции $f_1 - f_5$ не обязательно различные.

9. Некоторые следствия теоремы Поста.

Следствие 1. Всякий замкнутый класс $Q, = P_2$ содержится целиком хотя бы в одном из 5 предполных классов T_0, T_1, S, L, M .

Следствие 2. Если к какому-нибудь из предполных классов Q добавить любую не принадлежащую ему функцию h , то замыкание системы $Q \cup \{h\}$ совпадает с P_2 .

Следствие 3. В P_2 существуют лишь 5 предполных классов:

T_0, T_1, S, L, M .

Следствие 4. Если в системе функций присутствуют константы 0 и 1, то для ее полноты достаточно, чтобы в ней содержались немонотонная функция и нелинейная функция.

10. Таблица Поста для некоторых булевых функций.

В таблице для каждого из пяти рассмотренных выше классов T_0, T_1, S, L, M знаками "+" и "-" показана принадлежность ему ряда известных функций: всех 4 функций одной переменной, 6 функций двух переменных и 2 функций трех переменных.

	0	1	X	$\neg X$	$X \& Y$	$X \vee Y$	$X \rightarrow Y$	$X \sim Y$	$X \oplus Y$	$X Y$	$X \oplus Y \oplus Z$	$m_3(X, Y, Z)$
T_0	+	-	+	-	+	+	-	-	+	-	+	+
T_1	-	+	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+
S	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	+	+
L	+	+	+	+	-	-	-	+	+	-	+	-
M	+	+	+	-	+	+	-	-	-	-	-	+

11. Некоторые тавтологии (A, B, C – произвольные формулы).

- (1) $A \vee \neg A$ – закон исключенного третьего, или tertium non datur.
- (2) $A \rightarrow A$.
- (3) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$.
- (4) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ – цепное рассуждение.
- (5) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$.
- (6) $A \& B \rightarrow A, A \& B \rightarrow B$.
- (7) $A \rightarrow (B \rightarrow A \& B)$.
- (8) $A \rightarrow (A \vee B), B \rightarrow (A \vee B)$.
- (9) $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$.
- (10) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ – закон Пирса.

Силлогизм modus ponens – схема $((A \rightarrow B) \& A) \rightarrow B$.

Силлогизм modus tollens – схема $((A \rightarrow B) \& \bar{B}) \rightarrow \bar{A}$.

Гипотетический силлогизм – $(A \rightarrow C) \& (C \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$.

Способы доказательства от противного:

1) $A \rightarrow B = \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (C \& \neg C) = (A \& \neg B) \rightarrow (C \& \neg C)$;

2) $A \rightarrow B = (A \& \neg B) \rightarrow \neg A$;

3) $A \rightarrow B = (A \& \neg B) \rightarrow B$

4) $A \rightarrow B = \neg B \rightarrow \neg A$ – закон контрапозиции.

12. Построение формальной аксиоматической теории.

(1) Некоторый алфавит A символов, называемых **символами** теории. Слова в алфавите A называются **выражениями** теории T .

(2) Выделено некоторое подмножество выражений, называемых **формулами** теории T (правильно построенные выражения).

(3) Выделено некоторое множество формул, называемых **аксиомами** теории T .

(4) Имеется конечное множество **правил вывода** $R_1, \dots, R_m$, каждое из которых есть отношение между формулами. Если $A_1, \dots, A_k, B$ – формулы и выполнено отношение $R_i(A_1, \dots, A_k, B)$, то B называется **непосредственным следствием** формул $A_1, \dots, A_k$, полученным по правилу R_i .

13. Некоторые свойства выводимости из системы гипотез.

Пусть Γ – произвольное множество формул, A, B, C – некоторые формулы.

1. $\Gamma, A \vdash A$.

2. Если $\Gamma \vdash A$, то $\Gamma, B \vdash A$.

3. Если $(\Gamma \vdash A) \& (\Gamma \vdash B) \& (A, B \vdash C)$, то $\Gamma \vdash C$.

4. Если $(\Gamma, A \vdash B) \& (\Gamma \vdash A)$, то $(\Gamma \vdash B)$.

14. Исчисление высказываний в форме аксиоматической теории.

1. Символы исчисления высказываний:

– символы переменных с индексами и без них: $X, Y, \dots, X_i, \dots$;

– два логических символа: $\neg$ и $\vee$;

– правая и левая скобки "(" и ")".

2. Формулы исчисления высказываний:

а) все переменные;

б) если A, B – формулы, то $(\neg A)$ и $(A \vee B)$ – то же формулы.

Сокращение: $A \rightarrow B$ означает $\neg A \vee B$.

3. Схемы аксиом исчисления высказываний.

Для любых формул A, B, C :

A1. $A \vee A \rightarrow A$.

A2. $A \rightarrow A \vee B$.

A3. $A \vee B \rightarrow B \vee A$.

A4. $(A \rightarrow B) \rightarrow (C \vee A \rightarrow C \vee B)$.

Вместо A, B, C могут быть подставлены любые формулы.

4. Правило вывода – силлогизм **modus ponens**:

$\frac{A, (A \rightarrow B)}{B}$, где над чертой записаны посылки, а под чертой –

заклЮчение. При записи в строку: $A, A \rightarrow B \vdash B$.

Кроме общих свойств выводимости 1–4 выполнено также свойство

5. Если $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ и $\Gamma \vdash A$, то $\Gamma \vdash B$.

Теорема о дедукции. Если для формул A, B и системы Γ выполнено $\Gamma, A \vdash B$, то выполнено $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Использование теоремы о дедукции позволяет утверждать истинность условного высказывания "если A , то B ".

3 следствия теоремы о дедукции.

Следствие 1. (правило силлогизма) $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$.

Следствие 2. $A \rightarrow (B \rightarrow C), B \vdash A \rightarrow C$.

Следствие 3. Если $\Gamma, A \vdash B$ и $\Gamma, \neg A \vdash B$, то $\Gamma \vdash B$.

Теоремы о выводимости тавтологий. Формула A исчисления высказываний выводима (из пустой системы гипотез, т.е. только из аксиом) тогда и только тогда, когда она тождественно истинна (тавтология) в логике высказываний (т.е. представляет тождественно равную 1 булеву функцию).

15. Некоторые эквивалентности для кванторных формул.

1. Перенос квантора через отрицание (законы де Моргана для предикатов): $\neg \forall X : A(X) = \exists X : \neg A(X)$; $\neg \exists X : A(X) = \forall X : \neg A(X)$.

2. Вынесение квантора за скобки.

Если формула $A(X)$ содержит свободную переменную X , а формула B не содержит X и в них нет переменных, свободных в одной из формул и связанных в другой, то:

$$\exists X : (A(X) \& B) = (\exists X : A(X)) \& B ;$$

$$\forall X : (A(X) \& B) = (\forall X : A(X)) \& B ;$$

$$\exists X : (A(X) \vee B) = (\exists X : A(X)) \vee B ;$$

$$\forall X : (A(X) \vee B) = (\forall X : A(X)) \vee B .$$

3. Законы коммутативности для одноименных кванторов.

$$\forall X : (\forall Y : A(X, Y)) = \forall Y : (\forall X : A(X, Y)) ;$$

$$\exists X : (\exists Y : A(X, Y)) = \exists Y : (\exists X : A(X, Y)) .$$

16. Формула F общезначима тогда и только тогда, когда формула $\neg F$ не является выполнимой; формула F выполнима тогда и только тогда, когда $\neg F$ не является общезначимой.

1. Если F и G – равносильные в логике предикатов формулы, то $F \sim G$ – общезначимая формула. При этом $I_F = I_G$.

2. Если $F \rightarrow G$ – общезначимая формула, то $I_F \subseteq I_G$.

3. Если Y не входит в формулу $P(X)$, то $\forall X : P(X) \rightarrow P(Y)$ и $P(Y) \rightarrow \exists X : P(X)$ – общезначимые формулы.

17. Теорема о подстановке в предикатную формулу.

Пусть F – тождественно истинная формула логики высказываний. Тогда подстановка вместо ее переменных $X_1, X_2, \dots, X_n$ предикатных формул $B_1, B_2, \dots, B_n$ такая, что получается правильная предикатная формула, дает общезначимую формулу логики предикатов.

18. Теорема Черча. Не существует алгоритма, который для любой формулы логики предикатов устанавливал бы, общезначима она или нет.

